Déterminants

A. DECK

Juillet 2023

Table des matières

Chapitre 1

Préface

1.1 Notations

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mais pas que).
Lorsque nous parlerons de groupe non-abélien, la loi de composition interne sera notée multiplicativement et l'élément neutre sera noté $\mathbf{1}$ ou $\mathbf{e}$.
L'application identité sera notée Id, et la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ sera notée Id_n.
Si A est une matrice, on notera ${}^tA$ sa transposée.
Pour parler d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, j'utiliserai l'abriéviation $\mathbb{K}$-ev.
La notation $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Krönecker, c'est une fonction qui vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.
On notera $A \cong B$ pour dire que A et B sont isomorphes.
Si E est un ensemble fini, on notera $\#E$, $\mathrm{Card}(E)$ ou encore $|E|$ le cardinal (nombre d'éléments) de E.
Si G est un groupe fini, $|G|$ désignera l'ordre de G.
Si a, b sont des entiers ou des polynômes, on notera $a \wedge b$ leur pgcd.

1.2 Notes de l'auteur

Ce cours a pour unique but de présenter le déterminant et ses différentes expressions. Le cours est rudimentaire et ne vise pas à traiter les sujets en profondeur. Pour approfondir, des exercices seront proposés. Ces exercices permettront notamment d'aller plus loin. Le cours ne traitera pas non plus des applications du déterminant. Cela sera proposé en exercice pour les lecteurs souhaitant approfondir. Personnellement, je pense que le cours doit être vu comme un immense exercice. Pour être sûr de maîtriser le cours, le lecteur doit s'assurer d'être en mesure de refaire chaque démonstration. Vous remarquerez sûrement une différence d'écriture au fur et à mesure de votre lecture, cela est dû à l'évolution de ma compréhension du déterminant et plus généralement à l'évolution de ma compréhension de l'Algèbre linéaire.

Chapitre 2

Motivations

2.1 Histoire

En mathématiques, le déterminant fut initialement introduit en algèbre, pour déterminer si un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues admet une unique solution. Il se révèle un outil très puissant dans de nombreux domaines (étude du déterminant d'un endomorphisme et recherche de ses valeurs propres, définition du déterminant de certaines familles de vecteurs, calcul différentiel).

Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés (axiomes) qu'on résume par le terme « forme n-linéaire alternée ». Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir encore ses champs d'applications. Mais le déterminant peut aussi se concevoir comme une généralisation à l'espace de dimension n de la notion de surface ou de volume orientés. Cet aspect, souvent négligé, est une approche pratique et éclairante des propriétés du déterminant.

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIXe siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan.

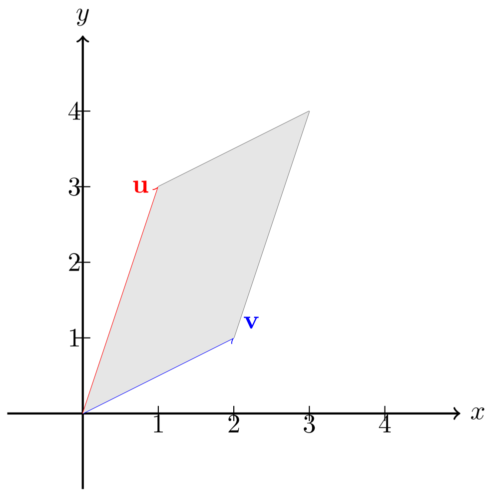
Dans son sens originel, le déterminant détermine l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la dimension 2 par Cardan en 1545 dans son Ars Magna, sous forme d'une règle pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette première formule porte le nom de regula de modo.

Aujourd'hui, on enseigne le déterminant en commençant par une approche géométrique. Par manque évident de motivation de la part de l'auteur, cette approche, bien que très intéréssante, ne sera pas abordée. Sachez néanmoins que le déterminant à une réelle signification géométrique. Personnellement, je le vois comme une unité de mesure, comme m, Km, L, Kg, etc. Si vous êtes intéréssés pour en savoir plus, je vous conseille le papier [6].

2.2 Premiers pas

Pour ce paragraphe, on définit $\det(u,v) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ où $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

2.2.1 Géométrie



Calculer l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs u et v (en gris). Puis calculer $\det(u, v)$ et $\det(v, u)$. Que peut-on en conclure ? [1]

2.2.2 Matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Calculer A^{-1} avec la méthode du pivot de Gauss, puis montrer que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B$ où $B \in M_2(\mathbb{K})$. Enfin démontrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

1. Pour une meilleure approche géométrique : voir [1].

Chapitre 3

Permutations

3.1 Définitions et théorèmes

Définition 3.1.1. On appelle permutation toute bijection de E dans lui même.

Exemple 1. Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et sa permutation $x \longmapsto x+2$.
On la note : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note les antécédents sur la première ligne et leurs images sur la seconde.

Définition 3.1.2. On appelle groupe symétrique de E et on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E muni de la loi de composition $\circ$. En particulier, si $E = [|1, n|]$, on le note $\mathfrak{S}_n$ et on l'appelle groupe symétrique d'ordre n.

Théorème 3.1.1. $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Démonstration. L'application identité est le neutre de ce groupe. De plus, la composition de deux bijections est une bijection. Enfin, comme ces deux bijections vont de E dans E, alors leurs compositions aussi.
Attention ! ce n'est pas forcément un groupe commutatif. □

Définition 3.1.3. Une permutation qui échange deux éléments distincts i et j en laissant tous les autres inchangés est appelée transposition. On la note $(i\ j)$.

Exemple 2. Par exemple, écrire $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ b & a & c & d & e & f & g & h & i & j \end{pmatrix}$ est plutôt long. Comme cette permutation laisse tout les éléments inchangés sauf deux, c'est une transposition et on peut l'écrire $(a\ b)$.

Théorème 3.1.2. *Toute permutation de $\mathfrak{S}(E)$ peut s'écrire comme un produit de transpositions*[1].

Définition 3.1.4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$. Pour chaque paire d'éléments (i,j) de $\mathfrak{S}(E)$, on dit que (i,j) est une inversion de σ si et seulement si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On appelle signature d'une permutation σ et on note $\varepsilon(\sigma)$ le nombre $(-1)^{\text{le nombre d'inversions de } \sigma}$.
On dit qu'une permutation est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire sinon.

Théorème 3.1.3. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.*

Démonstration. Etudions le numérateur de cette grosse formule :

- Si (i,j) n'est pas une inversion de σ alors $\sigma(i) - \sigma(j)$ s'écrit $k - l$ avec $1 \leq k < l \leq n$.
- Si (i,j) est une inversion de σ alors $\sigma(i) - \sigma(j)$ s'écrit $-(k - l)$ avec $1 \leq k < l \leq n$.
- Comme σ est une bijection, chaque paire (k,l) n'apparaît qu'une seule fois.

En changeant (k,l) en (i,j) (car ce sont des variables muettes), on peut donc réécrire :

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = (-1)^{\text{le nombre de transposition de } \sigma} \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{i-j}{i-j} = \varepsilon(\sigma)$$

□

Théorème 3.1.4. *La signature est un morphisme de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$.*

Exemple 3. Prenons $(a\ b)$ et $(c\ d)$, alors $\varepsilon((a\ b)\circ(c\ d)) = 1 = \varepsilon((a\ b))\varepsilon((c\ d))$.
Pour rappel, si l'on a $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe, avec $(G, \star)$ et $(H, \spadesuit)$ deux groupes, alors $\forall x, y \in G$,

$$f(x \star y) = f(x) \spadesuit f(y).$$

Démonstration. Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ (je me permets de ne considérer que $\mathfrak{S}_n$ car pour tout groupe G fini d'ordre n, on a $\mathfrak{S}(G) \cong \mathfrak{S}_n$). On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\circ\sigma') &= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i-j} \\
&= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i-j} \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \\
&= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \varepsilon(\sigma')
\end{aligned}$$

1. Cette preuve nécessite des outils introduits dans les prochaines pages. Nous y reviendrons donc à la fin de ce paragraphe 3.1.

Si on étudie le terme restant comme dans la preuve précédente, on observe qu'on peut remplacer $\sigma'(i) = k$ et $\sigma'(j) = l$ tout en supposant $1 \leq k < l \leq n$ (quitte à multiplier par -1 en haut et en bas). On peut donc réindexer le produit restant et on trouve $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$. $\square$

Définition 3.1.5. On définit les permutations circulaires ou cycles. Le p-cycle associé aux éléments distincts $a_1, \ldots, a_p$ (pris dans cet ordre) envoie l'élément a_1 sur a_2, puis a_2 sur a_3 $\ldots$ et enfin a_p sur a_1. Tous les autres éléments restent inchangés. Un tel cycle se note habituellement sous la forme $(a_1 \ \ldots \ a_p)$.

Exemple 4. Reprenons $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors le 5-cycle $x \longmapsto x+1$ se note : $(0\ 1\ 2\ 3\ 4)$.
Remarquons qu'une transposition est un 2-cycle.

Définition 3.1.6. On appelle support d'une permutation l'ensemble des éléments qui ne restent pas inchangés par cette dernière.

Exemple 5. Soit $(a_1 \ \ldots \ a_p)$ un p-cycle, alors son support est $\{a_1, \ldots, a_p\}$.

Théorème 3.1.5. *Soit σ_p, un p-cycle $(a_1 \ \ldots \ a_p)$. Alors $\varepsilon(\sigma_p) = (-1)^{p-1}$.*

Démonstration. σ_p n'a aucun point invariant.
De plus, $\sigma_p = (a_1\ a_p)(a_1\ a_{p-1}) \ldots (a_1\ a_3)(a_1\ a_2)$. Conclusion : il y a bien $p-1$ transpositions et chaque transposition possède exactement une inversion, donc $\varepsilon(\sigma_p) = (-1)^{p-1}$. $\square$

Revenons maintenant sur la preuve du théorème de décomposition en transpositions 3.1.2.

Démonstration. Nous avons vu dans la démonstration précédente que tout p-cycle se décompose en produit de transpositions. Nous alons donc nous ramener au cas de produit de cycles à supports disjoints.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout $i \in [|1, n|]$, on note $\mathcal{O}_i = \{a_{i_k} = \sigma^k(i) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Les $\mathcal{O}_i$ sont des ensembles finis, car σ est d'ordre fini. On applique alors l'algorithme suivant pour décomposer σ en cycles à supports disjoints :

— pour tout $i \in [|1, n|]$, on pose $c_i = (a_{i_o}\ a_{i_1}\ \cdots)$ qui a pour support $\mathcal{O}_i$
— on écrit $C_1 = c_1$
— on pose $C_{k+1} = c_p$ où $p = \min\{i > k \mid \forall j \in [|1, k|],\ i \notin \mathcal{O}_j\}$, jusqu'a ce qu'un tel p n'existe plus
— on écrit $\sigma = C_1 C_2 \cdots C_q$

On a alors décomposé σ en cycles à supports disjoints. On conclut la preuve en décomposant ces cycles en transpositions, comme vu précédemment. $\square$

3.2 Exercices

Exercice 3.2.1. Lister les éléments de $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$. En déduire le cardinal de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.2. On dit qu'une permutation σ d'un ensemble E est un dérangement si elle n'a aucun point fixe, c'est à dire $\forall k \in E, \sigma(k) \neq k$. On notera D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$. On définit $P_k(n)$ comme l'ensemble des permutations avec k points fixes de $\mathfrak{S}_n$.

i) Déterminez $\#P_k(n)$ en fonction de D_n.
ii) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ (vous pouvez considérer le cardinal de $\mathfrak{S}_n$).
iii) En utilisant la formule d'inversion de Pascal calculer D_n, puis calculer la probabilité quand $n \to +\infty$ de piocher une permutation de $\mathfrak{S}_n$ qui soit un dérangement.

Rappel formule d'inversion de Pascal : si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, alors $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Exercice 3.2.3. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, trouver le nombre de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.4. Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions et calculer la signature de σ.
Justifier l'affirmation suivante "un produit de cycles à supports disjoints est commutatif".

Exercice 3.2.5. On note A l'ensemble des cycles à supports disjoints de $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que $\langle A \rangle = \mathfrak{S}_n$, où $\langle A \rangle$ est le plus petit sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ contenant A. On peut admettre que $\sigma^{n!} = Id$.

Plus généralement, si G est un groupe et $A \subset G$, $\langle A \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant A. Si $A = \{a\}$, alors on notera $\langle a \rangle := \langle \{a\} \rangle$. Si $B \subset G$, on notera $\langle A, B \rangle := \langle A \cup B \rangle$.
Revenons sur ce que l'on a admis pour cet exercice. Il est plustôt évident que $\sigma^{n!} = Id$, mais ce résultat est un corollaire d'un théorème plus puissant : le **théorème de Lagrange**. Ce dernier nous dit que *si G est un groupe fini d'ordre n, alors pour tout sous-groupe H de G, $|H|$ divise n.* Si on prend $H = \langle x \rangle$, avec $x \in G$, on en déduit que l'ordre de n'importe quel élément de G divise n.

Démonstration. Démontrons ce théorème. Soit G, un groupe fini d'ordre n, et H un sous-groupe de G. On notera $xH := \{xh \mid h \in H\}$, où $x \in G$. Pour tout $x, y \in G$, on peut définir la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$:

$$x \,\mathcal{R}_H\, y \iff xH = yH.$$

Si $x \,\mathcal{R}_H\, y$, on dit que x et y sont congrus à droite modulo H. Si vous le souhaitez, vous pouvez également définir la relation de congruence à gauche modulo H et vous en servir dans cette preuve. Remarquez que H et xH sont équipotents (équipotence donnée par $\tau_x(h) = xh$ et $\tau_x^{-1}(h) = \tau_{x^{-1}}(h) = x^{-1}h$). Il s'ensuit que $|xH| = |H|$. Résultat très fort car il indique que toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_H$ sont de cardinal $|H|$. De plus, remarquons que G est l'union, qui plus est disjointe, des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_H$. Si on note $[G : H]$ l'indice de H dans G, qui est le nombre de classes à droite modulo H (le nombre de classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_H$ dans G), alors on a :

$$|G| = [G : H] \times |H|.$$

Ainsi se conclut la preuve du théorème de Lagrange. □

Exercice 3.2.6. On appelle ordre d'un élément σ de $\mathfrak{S}(E)$, le plus petit entier naturel non nul k, tel que $\sigma^k = Id$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que si σ se décompose en produit de cycles à supports disjoints $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_p$, d'ordres respectifs $i_1, i_2, \dots, i_p$, alors σ est d'ordre $\text{ppcm}(i_1, i_2, \dots, i_p)$.

Cette notion d'ordre peut être généralisée pour un groupe quelconque. L'ordre d'un élément x d'un groupe G, est $|\langle x\rangle|$, où $|A|$ est le cardinal de A. Je vous laisse vous convaincre que cette définition est équivalente à celle donnée dans l'énoncé. On définit également l'ordre d'un groupe G comme $|G|$. Si $|G|$ est fini, alors on dit que G est un groupe fini. C'est le cas de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.7. Soit E un ensemble potentiellement infini. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(E)$, montrer que l'ordre de $\sigma\tau$ est égal à l'ordre de $\tau\sigma$.

Vous pouvez faire cette démonstration dans un cadre plus général en prenant x, y dans un groupe quelconque.

Exercice 3.2.8. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\Sigma = \left\{\sigma^i \mid 1 \leq i \leq k\right\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, puis montrer que $\Sigma = \langle\sigma\rangle$.

Remarquons que pour montrer qu'une partie non vide H d'un groupe G est un sous-groupe de G, il suffit de montrer que $\forall x, y \in H$, $x^{-1}y \in H$.

Exercice 3.2.9. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq p \leq n$ et $a_1, a_2, \dots, a_p \in [|1, n|]$ tous différents. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, étudier $\sigma(a_1, a_2, \dots, a_p)\sigma^{-1}$. On appelle centre d'un groupe G l'ensemble des éléments commutant avec tout le groupe et on le note $Z(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G\ ,\ gz = zg\}$. En déduire le centre de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3.2.10. On définit $\mathfrak{A}_n$, comme l'ensemble des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe. Soient G un groupe et H un de ses sous-groupes, on dit que H est distingué (ou normal) dans G si $\forall g \in G,\ gHg^{-1} = H$. On note alors $H \lhd G$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.
Indication : étudier les noyaux de morphismes de groupes.

Remarquez que $H \lhd G \iff \forall g \in G,\ gHg^{-1} \subset H$. Cette propriété de normalité peut paraître étrange, mais elle assure simplement l'égalité entre les classes à gauche et les classes à droite des éléments de G pour la relation de congruence modulo H (relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$), ce qui nous permet de construire le groupe quotient G/H. Notons $\overline{x}$, la classe d'un élément $x \in G$, pour la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$. Alors si H est distingué dans G, $\forall x, y \in G$, on a : $\overline{x} \cdot \overline{y} = xHyH = xyHH = xyH = \overline{x \cdot y}$. Ce qui nous donne une structure de groupe sur G/H.

Exercice 3.2.11. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
Soit G un groupe, on appelle groupe dérivé de G et on note $D(G) := \{[x, y] \mid x, y \in G\}$, où $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. On dit qu'un groupe G est résoluble s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\underbrace{D(\dots D(G))..)}_{n \text{ fois}} = \{e\}$, où e est le neutre de G.
Montrer que pour $n \leq 5$, $\mathfrak{S}_n$ n'est pas résoluble.

Ce résultat est utilisé en théorie de Galois pour prouver qu'il n'existe pas de formule générale exprimant les racines d'une équation $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ avec les opérateurs $+ \ - \ \times \ \sqrt[n]{}$.

Passons maintenant à une étude plus générale des groupes [1].

Exercice 3.2.12. Soient $(G,*)$ un groupe et X un ensemble. On appelle action de G sur X toute application "$\cdot$" de $G\times X$ dans X, qui à un couple $(g,x)\in G\times X$ associe un élément $g\cdot x$ de X, telle que :

— $\forall x\in X,\ e\cdot x=x$, où e est l'élément neutre de G.

— $\forall g,h\in G$ et $\forall x\in X$, $g\cdot(h\cdot x)=(g*h)\cdot x$.

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X. Pour $x\in X$, on définit alors
$\mathrm{Orb}(x):=\{g\cdot x\mid g\in G\}$ et $\mathrm{Stab}(x):=\{g\in G\mid g\cdot x=x\}$, l'orbite et le stabilisateur de x.
Montrer que $\forall x\in X$, $|G|=|\mathrm{Stab}(x)|\times|\mathrm{Orb}(x)|$ (formule des classes).

Exercice 3.2.13. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Montrer que le nombre d'orbite différents pour les éléments de X est donné par (formule de Burnside) :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{x\in X\mid g\cdot x=x\}|.$$

1. Les groupes et notamment les groupes finis regorgent de mystères, pour continuer votre étude des groupes finis, je vous conseille le livre [3].

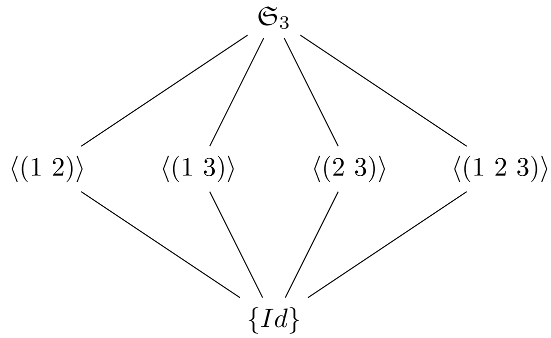


FIGURE 3.1 – Treillis des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.

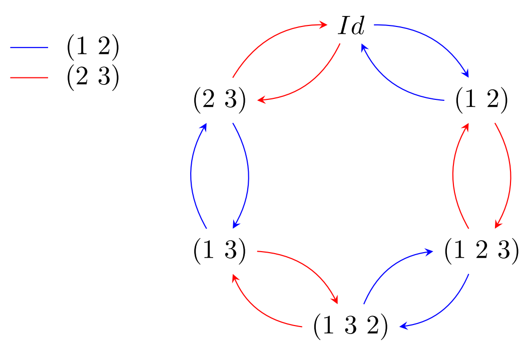


FIGURE 3.2 – Graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_3$ avec les générateurs (1 2) et (2 3).

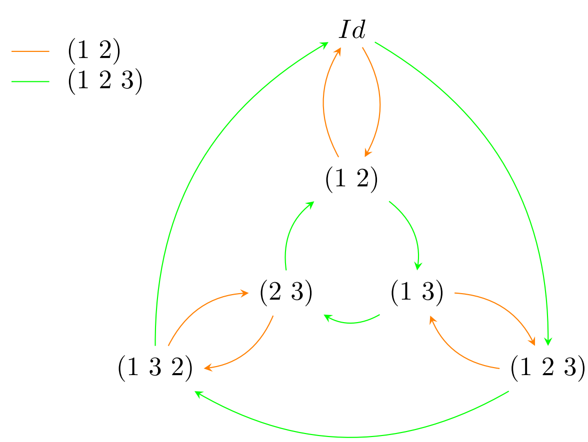


FIGURE 3.3 – Graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_3$ avec les générateurs (1 2) et (1 2 3).

Chapitre 4

Formes n-linéaires alternées

4.1 Définitions

Définition 4.1.1. Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-ev. On appelle $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire si f est linéaire en chaque variable, c'est à dire :

$$f(x_1, \dots, \lambda u + \mu v, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, u, \dots, x_n) + \mu f(x_1, \dots, v, \dots, x_n).$$

Exemple 1. Le produit scalaire est une application bi-linéaire (une forme bilinéaire plus précisment).

Définition 4.1.2. Si $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est une application n-linéaire et que $F = \mathbb{K}$, alors on appelle f une forme n-linéaire.

Définition 4.1.3. Si $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, alors on dit que f est antisymétrique.

Définition 4.1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n. On dit que f est alternée si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Exemple 2. Par exemple, $f(x, y) = x - y$ est alternée. On peut également observer f est antisymétrique : $f(y, x) = y - x = -(x - y) = -f(x, y)$.

4.2 Théorèmes

Théorème 4.2.1. *Si f est alternée, alors f est antisymétrique.*

Démonstration. Soit $f : E^n \longrightarrow F$, n-linéaire alternée. Soit $i, j \in [|1, n|]$,

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0 \\ \iff & f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0 \\ & \dots \\ \iff & f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -\, f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

Théorème 4.2.2. *L'espace des formes n-linéaires alternées d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est une droite vectorielle (espace vectoriel de dimension 1).*

Démonstration. Appelons $\mathcal{L}$ l'espace des formes n-linéaires et $\mathcal{H}$ l'espace des formes n-linéaires alternées d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Prouvons que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$ et de dimension 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, une forme n-linéaire alternée. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.
Alors, $\forall j \in [|1, n|],\ x_j = \sum_{i_j=1}^{n} \lambda_{i_j{}^j} e_i$, avec $\lambda_{i_j{}^j} \in \mathbb{K}$.

(Attention ! il est important de comprendre la signification des trois indices sur le $\lambda_{a_{b}{}^j}$. Ces trois indices forment deux variables : a_b et j. a_b est une variable muette car c'est un indice de sommation qui prend toutes les valeurs possibles entre 1 et n. On pourrait donc se retrouver avec $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}$ où $i_1 = i_2$. Pourtant, cela ne signifie en rien que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$ car ils n'appartiennent pas au même ensemble. Justement, on peut noter l'ensemble des λ rattachés à x_j tel quel : $\Lambda_j = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, ce qui nous permet de réécrire $x_j = \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \lambda e_i$ avec $i = 1$ puis 2 puis ... Pour éviter cela nous utiliserons trois indices.)

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2{}^2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1{}^1} \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2{}^2} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n{}^n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n} \lambda_{i_1{}^1} \dots \lambda_{i_n{}^n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

or f est alternée, donc $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0$, dès que $e_{i_a} = e_{i_b}, a, b \in [|1, n|]$. On peut donc garder uniquement $i_1, \dots, i_n$, où tous les éléments sont distincts.
Donc $\#\{i_1, \dots, i_n\} = n$ et donc $\mathfrak{S}(\{i_1, \dots, i_n\}) \cong \mathfrak{S}_n$.

Ceci nous permet de réécrire en utilisant le caractère alterné puis antisymétrique de f :

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(\{i_1,\dots,i_n\})} \left(\left(\prod_{j=1}^{n}\lambda_{\sigma(i_j)^j}\right) f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\sigma(i)^i} f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)}) \\ &= f(e_1,\dots,e_n)\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\sigma(i)^i}\right). \end{aligned}$$

De plus :

- $\mathcal{H}$ est stable par addition et multiplication par un scalaire
- $0_{\mathcal{L}} \in \mathcal{H}$
- $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$

Conclusion : $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\dim(\mathcal{H}) = 1$. □

Théorème 4.2.3. *Si f est une forme n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$, on ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. Soient $(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_i+\lambda x_j,\dots,x_j,\dots,x_n) &= f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) + \lambda\underbrace{f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)}_{=0} \\ &= f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n). \end{aligned}$$

. □

4.3 Exercices

Exercice 4.3.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par la somme de ses termes diagonaux, et on la note $\mathrm{Tr}(A)$. Montrer que la trace est une forme linéaire, puis montrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Enfin, montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tA)$.

Exercice 4.3.2. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est un produit scalaire sur E si :

— $\forall u \in E,\ f(u,u) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $u = 0$.

— $\forall u, v \in E,\ f(u,v) = f(v,u)$.

— f est bilinéaire.

Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$, $f(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
On note souvent les produits scalaires $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 4.3.3. Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Montrer que $\forall (x, y) \in E \times E,\ \ |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 4.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $M_n(\mathbb{R})$ rencontre $GL_n(\mathbb{R})$ ($\mathcal{H} \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$).

Chapitre 5

Déterminant (les fondamentaux)

Définition 5.0.1. On appelle déterminant dans une base $\mathfrak{B}$ d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, toute forme n-linéaire alternée $\varphi : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{\text{n fois}} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi(\mathfrak{B}) = 1$.
On note une telle forme linéaire $\det_{\mathfrak{B}}$.
On définit le déterminant pour les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ en prenant leurs vecteurs colonne et $\mathfrak{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ (les colonnes de I_n).

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ (idem pour une famille de vecteurs), on peut donc définir :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Souvent, on note $\det(A) = |A|$. Attention ! Ce n'est pas la valeur absolue de A, ni sa norme.

Dans ce chapitre, nous ne parlerons que de déterminant de matrices pour simplifier l'écriture. Mais tout peut être réécrit, en considérant le déterminant sur une famille de vecteurs.

5.1 Existence et unicité

Théorème 5.1.1. *Pour tout $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie, le déterminant existe et est unique.*

Parler du déterminant c'est bien, mais existe-t-il ?

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, prouvons que $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ est bien une forme n-linéaire alternée telle que $\det(I_n) = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}\det(I_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i),i}\\ &= 1\end{aligned}$$

où j'ai réécrit I_n comme $(\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Avec cette écriture, on voit facilement que si σ n'est pas l'identité, alors le terme de la somme rattaché à σ est nul.
Montrons que det est une forme n-linéaire alternée. Pour ce faire, nous allons noter C_i la i-ème colonne de A. On notera également $C_{k,i}$ la k-ème coordonnée du vecteur C_i. Considérons $C_j = \lambda u + v$, avec $j \in [|1,n|], \lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(C_1,\dots,\lambda u+v,\dots,C_n)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} C_{\sigma(i),i}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)C_{\sigma(1),1}\dots C_{\sigma(j),j}\dots C_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)C_{\sigma(1),1}\dots(\lambda u_{\sigma(j),j}+v_{\sigma(j),j})\dots C_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\left(\lambda u_{\sigma(j),j}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} + v_{\sigma(j),j}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i}\right)\\ &= \lambda\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)u_{\sigma(j),j}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)v_{\sigma(j),j}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} C_{\sigma(i),i}\\ &= \lambda\det(C_1,\dots,C_{j-1},u,C_{j+1},\dots,C_n)+\det(C_1,\dots,C_{j-1},v,C_{j+1},\dots,C_n)\end{aligned}$$

donc det est une forme n-linéaire.
Il ne reste plus que deux propriétés à prouver. Reprenons notre matrice mais considérons maintenant p et q dans $[|1,n|]$ tels que $p \neq q$ et $C_p = C_q$. Considérons alors τ la transposition qui inverse p et q.
Alors $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} = a_{\sigma\tau(1),1}\dots a_{\sigma\tau(n),n}$ car le produit est commutatif.
De plus, $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$.
Notons $\mathfrak{S}_n^+$ l'ensemble $\{\sigma\in\mathfrak{S}_n|\varepsilon(\sigma)=1\}$ et notons $\mathfrak{S}_n^-$ l'ensemble $\{\sigma\in\mathfrak{S}_n|\varepsilon(\sigma)=-1\}$.

On a alors $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n^- \cup \mathfrak{S}_n^+$ et $\mathfrak{S}_n^- \cap \mathfrak{S}_n^+ = \varnothing$. ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^-} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{(\sigma\tau) \in \mathfrak{S}_n^-} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^+} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\mathbb{K}$ est un corps (donc stable par addition et multiplication), il est clair que $\det(A) \in \mathbb{K}$.
Conclusion : det est bien une forme n-linéaire alternée. $\square$

Ouf ! Nous nous intéressons à un objet qui existe. Mais est-il unique ?

Démonstration. Montrons l'unicité du déterminant.
Soit $\phi : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, qui vérifie les propriétés du déterminant (forme n-linéaire alternée telle que $\phi(I_n) = 1$). Comme l'espace des formes n-linéaires alternées est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1, alors $\phi(A) = \alpha \det(A)$. Donc, en évaluant en I_n, on trouve $\phi(I_n) = \alpha$.
On a alors $\phi(A) = \phi(I_n)\det(A)$. Or, si ϕ vérifie les propriétés du déterminant, alors $\phi(I_n) = 1$.
Conclusion : $\phi = \det$, ce qui prouve l'unicité du déterminant. $\square$

5.2 Développement par lignes et colonnes

Définition 5.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle mineur d'ordre i, j et on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors $\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

Définition 5.2.2. On appelle cofacteur d'ordre i, j de la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on note $C_{i,j}$ le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème 5.2.1. *Pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [|1, n|]$ on a :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

C'est la formule de développement par ligne. On peut également développer par colonne :

$$\forall j \in [|1,n|],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

Nous aurons besoin de quelques Lemmes pour cette preuve.

Lemme 5.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$ (ce qui implique la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes).

Démonstration. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} &= a_{\sigma(1),\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma(2),\sigma^{-1}(\sigma(2))}\dots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))} \\ &= a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\dots a_{n,\sigma^{-1}(n)}. \end{aligned}$$

De plus, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.
Donc,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1})a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\dots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \det({}^tA). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.2. Soit M une matrice bloc de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec $A \in M_p(\mathbb{K}), B \in M_q(\mathbb{K})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Fixons $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in M_q(\mathbb{K})$. Définissons

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{K}^p)^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & |A|\times|B| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g: & (\mathbb{K}^p)^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}. \end{array}$$

On remarque que f et g sont des formes n-linéaires alternées. Et donc d'après le théorème 4.2.2, f et g sont proportionnelles. En évaluant en I_n, on trouve que $f(I_n) = |B| = g(I_n)$[1]. Ainsi $f = g$, ce qui conclut la preuve du Lemme. □

Nous allons maintenant prouver la formule de développement du déterminant par ligne. La preuve pour le développement par colonne n'est pas nécessaire car $\det(A) = \det({}^tA)$.

1. On calcule $g(I_n)$ en développant avec la formule de Leibniz et en remarquant que les termes de la somme sur les permutations ne laissant pas invariants $[|1,p|]$ sont nuls.

Démonstration. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, telle que

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in [|1, n]$, on réalise un i-cycle σ_1 sur les indices des i premières lignes afin d'obternir la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Du fait du caractère alterné du déterminant, nous avons que $\det(A) = \varepsilon(\sigma_1)\det(A') = (-1)^{i-1}\det(A')$. Nous allons continuer d'utiliser la linéarité du déterminant :

$$\det(A') = \begin{vmatrix} a_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i,2} & 0\dots & \dots 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i,n} \\ & & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

on met maintenant les termes non-nuls de chaque première ligne en facteur :

$$\det(A') = a_{i,1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + a_{i,n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On applique un cycle sur les indices des colonnes de chaque déterminant afin de faire passer la colonne comportant le 1 de la première ligne en première colonne :

$$\det(A') = a_{i,1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n}(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{2,n} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,n} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons alors remarquer que nos déterminants sont des déterminants de matrices bloc, de la forme : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C_1 & M_j \end{array}\right)$, avec M_j la matrice du j-ème terme de la somme ci-dessus.
Or, on sait que le déterminant d'une matrice bloc est le produit des déterminants des blocs diagonaux.
Donc $\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C_1 & M \end{array}\right) = \det(1)\det(M_j) = \det(M_j)$.

Mais si nous observons de plus près une matrice $M_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$
$\forall j \notin \{1, n\}$ (sinon je vous laisse réécrire la matrice). On remarque alors que M_j n'est rien d'autre que $\Delta_{i,j}$, le mineur d'ordre i, j de la matrice A.
Nous pouvons donc réécrire :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{i-1}\det(A') \\ &= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{j-1}\Delta_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} \ . \end{aligned}$$

□

5.3 Propriétés fondamentales

Dans cette section nous verrons quelques propriétés du déterminant (je ne démontrerai pas les plus évidentes). *Notez que vous en avez déjà vu certaines qui étaient nécessaires à la preuve du développement du déterminant.*

1. Si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = ad - bc$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = aei + dhc + bfg - gec - dbi - ahf$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec une ligne ou une colonne dont tous les éléments sont nuls, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Démontrons la propriété 2.
Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$. Définissons $f : A \in M_n(\mathbb{K}) \longmapsto \det(AB) \in \mathbb{K}$ et $g : A \in M_(\mathbb{K}) \longmapsto \det(A) \cdot \det(B) \in \mathbb{K}$. Alors f et g sont toutes deux n-linéaires alternées. Elles sont donc proportionnelles. De plus, $f(I_n) = \det(B) = g(I_n)$, donc le coefficient de proportionnalité est 1, d'où $f = g$.

□

Remarquez qu'un corrollaire direct de cette propriété est que toutes matrices semblables ont le même déterminant.

5.4 Formule de Cramer

Définition 5.4.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle comatrice de A et on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice constituée des cofacteurs de A :

$$\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Théorème 5.4.1. *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$, notons $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M, on a alors :*

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M) I_n.$$

Démonstration. Nous nous contenterons de montrer la première égalité $M\widetilde{M} = \det(M)I_n$, l'autre égalité se montre de manière analogue.

Notons $A = M\widetilde{M}$, on notera a_{ij} le coefficient i, j de A. De la même manière, on notera m_{ij} (resp. $\widetilde{m}_{ij}$) les coefficients i, j de M (resp. $\widetilde{M}$). On a alors, pour tout $i, j \in [|1, n|]$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \widetilde{m}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} m_{ik} \Delta_{jk}.$$

Deux cas surviennent alors :

— si $i = j$, alors on reconnaît le développement du déterminant par rapport à la i-ème ligne ;

— si $i \neq j$, alors on reconnaît le développement du déterminant par rapport à la i-ème ligne de la matrice obtenue en remplaçant la j-ème ligne de M par sa i-ème ligne. Comme le déterminant est une forme n-linéaire alternée, alors ce déterminant vaut 0, d'où $a_{ij} = 0$.

□

Remarquez qu'un corollaire direct de ce théorème est que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

5.5 Formule de Binet-Cauchy

La formule de Binet-Cauchy est une généralisation de la formule du produit.

Théorème 5.5.1. *Soient $A \in M_{r,l}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{l,r}(\mathbb{K})$.*
Alors que $\det(AB) = \sum_{|K|=r} \Delta_{\_,K}(A) \times \Delta_{K,\_}(B)$, *où :*

- *K est une partie de l'intersection des ensembles d'indices des lignes de A et de colonnes de B.*
- *$|K|$ désigne le cardinal de K .*
- *_ désigne l'ensemble des lignes de A (resp. l'ensemble des colonnes de B).*
- *$\Delta_{I,J}(M)$ désigne le déterminant de la matrice obtenue en gardant les lignes (resp. les colonnes) de M dont l'indice appartient à I (resp. J).*

Exemple 1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Avec la formule de Binet-Cauchy, on obtient :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Démonstration. On notera $l_i(A)$ la i-ème ligne de A et $c_j(B)$ la j-ème colonne de B. Considérons le membre de gauche comme une application $f(l_1(A), \dots, l_r(A), c_1(B), \dots, c_r(B))$, qui va de $\underbrace{\mathbb{K}^l \times \dots \mathbb{K}^l}_{2r \text{ fois}}$ dans $\mathbb{K}$. De même, considérons le membre de droite comme une application $g(l_1(A), \dots, l_r(A), c_1(B), \dots, c_r(B))$, qui va également de $\underbrace{\mathbb{K}^l \times \dots \mathbb{K}^l}_{2r \text{ fois}}$ dans $\mathbb{K}$.
Prouver le théorème de Binet-Cauchy revient maintenant à prouver que $f = g$.
De part les propriétés du déterminant, f et g sont n-linéaires. Le Coefficient i, j de AB est donné par $l_i(A) \cdot c_j(B)$. Donc si A a deux lignes égales ou si B a deux colonnes identiques, $\det(AB)$ sera nul. Ainsi, f est alternée par rapport aux $l_i(A)$ et aux $c_j(B)$ (mais pas globalement : $l_i(A) = c_j(B) \nRightarrow \det(AB) = 0$). Il en va de même pour g. Prenons maintenant $(e_1, \dots, e_l)$, la base canonique de $\mathbb{K}^l$. Nous pouvons donc réécrire $l_i(A) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{i_j} e_j$ et $c_j(B) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{j_i} e_i$, où les λ appartiennent à $\mathbb{K}$. En utilisant la n-linéarité de f et g, nous pouvons nous débarrasser des scalaires. Nous nous sommes donc ramenés à prouver que $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = g(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ et où les e_j (resp. les e_i) sont distincts (sinon alors $f = g = 0$ de part leur caractère alterné).
En utilisant le caractère antisymétrique de f et g, nous pouvons réordonner les vecteurs de sorte à se rammener à l'égalité $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = g(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ avec $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ et $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ (à chaque fois que nous appliquons une permutation σ aux vecteurs de f et g, nous multiplions les deux côtés de l'égalité par $\varepsilon(\sigma)$, ce qui ne la modifie pas).
On notera J l'ensemble des j_i et I l'ensemble des i_j. On note A_J (reps. B_I) la matrice obtenue en gardant uniquement les colonnes d'indice dans J (resp. les lignes d'indice dans I). Montrer la formule de Binet-Cauchy revient donc à montrer que pour tout I, J, ensemble d'indices ordonnés, $\det(A_J B_I) = \sum_{|K|=r} \Delta_{\_,K}(A_J) \times \Delta_{K,\_}(B_I)$.
Si $I \neq J$, alors $\det(A_J B_I)$ sera nul car le rang de $A_J B_I$ sera inférieur à r et si $I = J$, $\det(A_J B_I) = \det(I_r) = 1$. On peut donc réécrire $\det(A_J B_I)$ comme $\delta_{J,I}$. De la même manière, $\Delta_{\_,K}(A_J) = \delta_{J,K}$ et $\Delta_{K,\_}(B_I) = \delta_{K,I}$. Nous y sommes presque ! Finir cette preuve, revient maintenant à seulement montrer

que :

$$\delta_{I,J} = \sum_{|K|=r} \delta_{KJ} \times \delta_{IK},$$

ce qui est évident [1] ! □

5.6 Déterminant et valeurs propres

Dans cette section, nous identifierons un endomorphisme et sa matrice associée.

Définition 5.6.1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$, on dit que x est un vecteur propre associé à l'endomorphisme u, si et seulement si il est non nul et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \lambda x$. On dit que λ est valeur propre de u rattachée au vecteur propre x.
Si λ est une valeur propre de u, on note E_λ, le sous-espace propre de E rattaché à λ qui est défini par $E_\lambda := \{v \in E \mid u(v) = \lambda v\}$.

Théorème 5.6.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est valeur propre de u, si et seulement si λ est racine du polynôme* $\det(XId - u)$ *(que l'on appelle polynôme caractéristique de u et que l'on note χ_u).*

Démonstration.

$$\begin{aligned} & u(x) = \lambda x \\ \iff & \lambda x - u(x) = 0 \\ \iff & (\lambda Id - u)(x) = 0 \text{ , donc } x \in \ker(\lambda Id - u) \\ \iff & (\lambda Id - u) \text{ n'est pas injective} \\ \iff & \det(\lambda Id - u) = 0 \end{aligned}$$

Remarquons, que nous aurions également pu définir χ_u comme $\det(u - XId)$ mais notre polynôme n'aurait pas été unitaire.

□

Définition 5.6.2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est dite diagonalisable, si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, tel que $A = PDP^{-1}$. On dit que A est semblable à D.

Théorème 5.6.2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A a n valeurs propres distinctes, alors* $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, *où les λ_i sont les valeurs propres de A. De la même manière,* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Démonstration. Si A a n valeurs propres distinctes, alors $A = PDP^{-1}$, où les colonnes de P sont les vecteurs propres de A et où le i-ème terme diagonal de D est la valeur propre associée à la i-ème colonne de P. Ainsi A est digonalisable. Étant donné que D est une matrice diagonale et que la trace et le déterminant sont invariants par conjugaison (ils sont cycliques), nous avons :

— $\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})\det(D) = \prod_{1 \le i \le n} \lambda_i$.

1. Pour une démonstration en vidéo et bien mieux expliquée : [2].

— $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PD) = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i$,

ce qui conclut la preuve. $\square$

Lemme 5.6.1. **Lemme des noyaux.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Alors :

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Démonstration. Commençons par montrer que $\ker PQ(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$.
L'inclusion de droite à gauche est évidente. Montrons l'inclusion réciproque. Grâce au théorème de Bezout, on se donne $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $UP + VQ = 1$, d'où on déduit $U(u)P(u) + V(u)Q(u) = Id$. Posons $\pi_1 = U(u)P(u)$ et $\pi_2 = V(u)Q(u)$. Alors, soit $x \in \ker PQ(u)$, $x = \pi_1(x) + \pi_2(x)$. $Q(\pi_1(x)) = [(QUP)(u)](x) = [Q(u)](x)[PQ(u)](x) = 0$[1], d'où $\pi_1 \in \ker Q(u)$. De la même manière $\pi_2 \in \ker P(u)$. Cela termine la preuve de l'inclusion réciproque.
Montrons maintenant que cette somme est directe. Soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$. Alors $[U(u)P(u) + V(u)Q(u)](x) = 0 \implies x = 0$. $\square$

Théorème 5.6.3. ***Lemme des noyaux généralisé.***
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P, P_1, \ldots, P_d \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \prod_{1\leq i\leq d} P_i$ et les P_i tous premiers entre eux deux à deux, alors :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{d} \ker P_i(u)$$

Démonstration. Ce théorème s'obtient par une récurrence directe sur le Lemme des noyaux. $\square$

5.7 Déterminant sur un anneau commutatif

[2]

Définition 5.7.1. On définit $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, l'anneau des polynômes en n indéterminées à coefficients entiers. Un tel polynôme s'écrit par définition comme une somme unique de monômes de la forme $\alpha X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ (où les multi-indices $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ sont deux à deux distincts), ce qui permet pour tout anneau commutatif A et tout élément de $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de définir une fonction $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto F(a_1, \ldots, a_n)$ de A^n dans A.

L'introduction des polynômes à plusieurs indéterminées s'harmonise naturellement avec la structure des déterminants, car le déterminant d'une matrice est une fonction polynômiale de ses entrées.

Lemme 5.7.1. L'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est intègre.

Démonstration. Cela résulte de l'intégrité de $\mathbb{Z}$. Une récurrence sur n suffit à prouver ce Lemme. $\square$

1. On utilise le fait que $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ soit un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.
2. Le sujet [7] présente une étude du déterminant sur un anneau commutatif.

Lemme 5.7.2. Soient A un anneau commutatif et $M \in M_n(A)$. Alors $\det(M) \in A$.

Démonstration. Ce résultat est immédiat en utilisant la formule de Leibniz. □

Grâce à ce Lemme, toutes les formules polynômiales du déterminant sur un corps sont alors conservées sur un anneau commutatif.

Théorème 5.7.1. *Soit A un anneau commutatif. Soit $M \in M_n(A)$, notons $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. Alors on a :*

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n.$$

Ce théorème nous dit donc que M est inversible si et seulement si $\det(M)$ est un élément inversible de A.

Démonstration. Soit A un anneau commutatif intègre. Comme A est intègre, on peut construire son corps des fractions K. K étant un corps, la formule est vraie dans $M_n(K)$. De plus, d'après le lemme précédent, pour $M \in M_n(A)$, $\det(M) \in A$ et $\widetilde{M} \in M_n(A)$. Etant donné que A est un sous-anneau de K, on peut étendre cette formule par restriction à $M_n(A)$.

A partir de maintenant on ne suppose plus A intègre.

Prenons S un ensemble fini de A. On note $\mathcal{A}(S)$ l'ensemble des éléments de A qui s'écrivent comme un polynôme à coefficients entiers en des éléments de S, c'est à dire des $x \in A$, tel qu'il existe un entier $r \geq 1$, des éléments $s_1, \ldots, s_r \in S$ et $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ tels que $x = F(s_1, \ldots, s_r)$. L'ensemble $\mathcal{A}(S)$ est un sous-anneau de A.

Il est clair qu'il existe un entier $n \geq 1$ et un morphisme d'anneau surjectif de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}(S)$. De plus, on sait que $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est intègre. Notons $B = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

Soit $M \in M_n(A)$, notons S l'ensemble de ses coefficents et $R = \mathcal{A}(S)$, ainsi $M \in M_n(R)$. De plus par le lemme précédent, $\det N \in R$ et $\widetilde{N} \in M_n(R)$. On dispose alors de $B \xrightarrow{f} R$ surjectif. En appliquant f aux coefficients, on peut étendre f de $M_n(B) \longrightarrow M_n(R)$. Il existe donc $N \in M_n(R)$ tel que $M = f(N)$. Alors :

$$f(\det N) = f\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} N_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} f(N_{\sigma(i),i}) = \det f(N).$$

Ainsi, $\widetilde{f(N)} = f(\widetilde{N})$. Comme B est intègre, on a alors

$$M\widetilde{M} = f(N\widetilde{N}) = f(\det N)I_n = \det f(N)I_n = \det(M)I_n.$$

On a donc prouvé ce résultat pour tout anneau commutatif. □

Théorème 5.7.2. *Soit A un anneau commutatif, soient $M, N \in M_n(A)$, alors :*

$$\det(MN) = \det(M)\det(N).$$

Démonstration. On procède de la même façon que pour le théorème précédent. □

La question du déterminant sur un corps non commutatif vient naturellement, pour cela je vous redirigerais vers l'article : [4].

5.8 Exercices

Exercice 5.8.1. Soient $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Indication : Remplacer la dernière colonne par une inconnue afin d'obtenir un polynôme.

Exercice 5.8.2. Soient $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{bmatrix}$$

Indication : Même technique que la question précédente afin de travailler avec une fraction rationnelle.

Exercice 5.8.3. Calculer le déterminant suivant : $\det\left(pgcd(i,j)_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

Indication : prouver la propriété suivante et servez-vous en pour réécrire la matrice :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

avec φ l'indicatrice d'Euler.

Exercice 5.8.4. Soient $x_0, \dots x_n, y_0 \dots y_n \in \mathbb{C}$.
Calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1}y_0 & \dots & x_0 y_0^{n-1} & y_0^n \\ x_1^n & x_1^{n-1}y_1 & \dots & x_1 y_1^{n-1} & y_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_1^{n-1}y_1 & \dots & x_n y_n^{n-1} & y_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.8.5. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5.8.6. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, qui vérifie $u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}$ $(*)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots a_{p-1} \in \mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre p. Expliciter u_n pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Indication : chercher une équation matricielle décrivant $(u_n)_{n\geq 0}$.

Chapitre 6

Un peu d'analyse

Après avoir travaillé avec le déterminant, il est normal de s'intéresser aux propriétés analytiques du déterminant.

6.1 Définitions et rappels

Le but de cette section est de calculer un développement limité à l'odre 1 du déterminant. Pour ce faire, je me dois d'introduire quelques outils de calcul différentiel qui nous seront indispensables [1].

Définition 6.1.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on dit que f est différentiable en a si et seulement si il existe $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, tel que, pour h au voisinage de a, on a :

$$f(a+h) = f(a) + u_a(h) + o(\|h\|).$$

Si une telle application existe, on note $u_a = df_a$ et on l'appelle la différentielle de f en a.

Exemple 1. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, calculons la différentielle de $f : M \longmapsto M^2$. Soit H au voisinage de M,

$$\begin{aligned} f(M+H) &= (M+H)^2 \\ &= M^2 + MH + HM + H^2 \\ &= f(M) + (MH + HM) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

On a donc que $df_M(H) = MH + HM$. Si vous vous ennuyez, n'hésitez pas à vérifier que df_M est bien une application linéaire.

La méthode que nous venons d'utiliser est très efficace lorsque nous disposons d'une expression facilement manipulable de notre fonction. Mais nous, nous nous attaquons au déterminant. Il est possible de calculer sa différentielle avec cette méthode mais ce sera très fastidieux. Si vous n'avez pas peur des énormes calculs, alors lancez-vous ! Sinon, pour nous faciliter la tâche, je vais introduire le concept de dérivée partielle.

1. Pour ceux qui veulent approfondir ces notions : [5].

Définition 6.1.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$. La dérivée partielle de f en a par rapport à la i-ème coordonnée, que l'on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}.$$

Si cette limite existe, on dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la i-ème variable.

Cette définition peut se généraliser aux fonctions vectorielles, mais comme le déterminant est une forme n-linéaire, nous utiliserons la définition ci-dessus.
Introduisons maintenant un théorème qui nous permettra de calculer la différentielle d'une fonction à partir de ses dérivées partielles.

Théorème 6.1.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a. Soit h au voisinage de a, on note h_i la i-ème coordonnée de h dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors on a :*

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration. D'après les hypothèses de l'énoncé, on a pour tout i entre 1 et n,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a) + df_a(te_i) + o(\|te_i\|) - f(a)}{t} \\ &= df_a(e_i).\end{aligned}$$

On a simplement utilisé le caractère différenciable de f en a pour passer de la première à la deuxième ligne ; puis, comme t est un scalaire et que df_a est linéaire, on a pu simplifier. On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned}df_a(h) &= df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i df_a(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Enfin, nous avons besoin d'un dernier Lemme avant de pouvoir attaquer.

Lemme 6.1.1. $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans$M_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, considérons la suite $A_p = M + \frac{1}{p}I_n$, et prouvons que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers M et est à valeur dans $GL_n(\mathbb{R})$. Le fait que $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$ est immédiat.
Si A_p n'est pas inversible, alors $\det(A_p) = 0 \iff \det(M + \frac{1}{p}I_n) = 0 \iff \frac{1}{p} \in \mathrm{Sp}(M)$. Or, M est

d'ordre n, donc M a au plus n valeurs propres. On pose alors $p_0 = \max\left\{p \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{p} \in \mathrm{Sp}(M)\right\}$, et on construit la suite

$$B_p = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } p \leq p_0 \\ A_p & \text{si } p > p_0 \end{array} \right.$$

alors $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers M et est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$. Ce qui conclut la démonstration du lemme. □

6.2 Différentielle du déterminant

Nous allons maintenant calculer la différentielle du déterminant et obtenir son développement limité d'ordre 1. Néanmoins, je trouve cet exercice très intéressant, alors je vous encourage vivement à le faire par vous-même. Voici quelques pistes pour vous aider : commencez par calculer la différentielle du déterminant en I_n, puis servez-vous en pour obtenir une différentielle en $X \in GL_n(\mathbb{R})$; enfin généralisez à $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Résolution :

Pour cet exercice nous considérerons l'application det de $M_n(\mathbb{R})$, mais rien ne vous empêche de faire cet exercice en considérant le déterminant sur une famille de vecteurs et une base. Pour faciliter l'écriture, on notera $f : A \longmapsto \det(A)$. Soient $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} df_{I_n}(H) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(I_n) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij} \lim_{t\to 0} \frac{f(I_n + tE_{ij} - f(I_n)}{t} \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_{ii} \\ &= \mathrm{Tr}(H). \end{aligned}$$

On a donc obtenu $\det(I_n + H) = 1 + \mathrm{Tr}(H) + o(\|H\|)$ et donc que $df_{I_n} = \mathrm{Tr}$.
Soit $X \in GL_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \det(X + H) &= \det(X(I_n + X^{-1}H)) \\ &= \det(X) \times \det(I_n + X^{-1}H) \\ &= \det(X)(1 + \mathrm{Tr}(X^{-1}H + o(\|H\|)) \\ &= \det(X) + \det(X)\,\mathrm{Tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(X) + \mathrm{Tr}(\det(X)X^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(X) + \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H) + o(\|H\|)) \end{aligned}$$

Super ! On sait maintenant que $df_X(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H)$.
Maintenant prenons $Y \in M_n(\mathbb{R})$. On observe que $X \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H)$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$ et coïncide avec df_Y. De plus, df_Y est une application linéaire dans un espace vectoriel de dimension finie, elle est donc continue. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, on peut conclure que $df_X = df_Y$, ce qui termine la résolution de cet exercice.

6.3 Exercices

Exercice 6.3.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec $f : x \longmapsto (f_1, \ldots, f_p)$, si f est différentiable en $a \in U$, on appelle matrice jacobienne de f et l'on note $J_f(a)$ ou $D_f(a)$ la matrice suivante

$$D_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \ddots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La jacobienne de f et sa différentielle sont liées par la relation suivante : $df_x(h) = D_f(x)h$.

Soit $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow R^m$, si g est également différentiable en a, alors $D(g \circ f)(a) = D_g(f(a)) \cdot D_f(a)$.
Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) = \det(e^{xA})$.
En utilisant les formules données précédemment, calculer $df_x(h)$.

Exercice 6.3.2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 7

Algorithmes

Le calcul de déterminants intervient souvent en analyse numérique. Voyons donc quelques algorithmes de calcul du déterminant.

7.1 Algorithme naïf

La première idée nous venant à l'esprit pour calculer un déterminant sur ordinateur, sera sûrement d'utiliser un algorithme récursif en développant le déterminant par ligne et par colonne.

```
"""
M = [[1,2,3],
     [4,5,6],
     [7,8,9]]
Notre matrice M sera representee par une liste a deux dimensions et ou l'element i,j de M sera accessible par M[i][j].
"""

def poplc(A, l, c):
    B = [ [A[i][j] for j in range(len(A[i])) ] for i in range(len(A))]
    B.pop(l) #supprime la l-eme ligne
    for (k) in range(len(B)): #supprime la c-eme colonne
        B[k].pop(c)
    return B


def det(A):
    for i in range(len(A)): # on teste si A est carree
        if len(A[i]) != len(A):
            return 0

    if len(A) > 1:
        s = 0
        for i in range(len(A)):
            s += (-1)**(i)  * A[0][i] * det(poplc(A,0,i)) # on recopie la formule
        return s
    else :
        return A[0][0]
```

Cet algorithme, bien que naturel, est totalement inefficace. En effet, sa complexité est de l'ordre de $O(n!)$.

7.2 Algorithme de Gauss

En utilisant l'algorithme de Gauss pour échelonner une matrice, nous pouvons développer le déterminant à partir d'une ligne ou d'une colonne presque nulle.

```python
def determinant_gauss(matrice):
    det = 1
    for i in range(n):
        # Recherche du maximum dans cette colonne
        max_el = abs(matrice[i][i])
        max_row = i
        for k in range(i + 1, n):
            if abs(matrice[k][i]) > max_el:
                max_el = abs(matrice[k][i])
                max_row = k

        # Echange la ligne ayant le max avec la ligne courante (colonne par colonne)
        for k in range(i, n):
            tmp = matrice[max_row][k]
            matrice[max_row][k] = matrice[i][k]
            matrice[i][k] = tmp

        # Mettre tous les coefficients sous le pivot a 0 dans la colonne courante
        for k in range(i + 1, n):
            facteur = -matrice[k][i] / matrice[i][i]
            for j in range(i, n):
                matrice[k][j] += facteur * matrice[i][j]

        det *= matrice[i][i]

    return det
```

Cela nous permet d'obtenir un algorithme de calcul avec une complexité de $O(n^3)$ en raison des trois boucles **for** imbriquées.

7.3 Algorithme de décomposition LU

Nous allons voir comment décomposer une matrice en produit de deux matrices triangulaires, ce qui dans certain cas permet de créer des algorithmes avec une meilleure complexité que celui de Gauss.

Définition 7.3.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est triangulaire supérieure (resp. inférieure), si tous les coefficients de A au-dessous de sa diagonale (resp. au-dessus) sont nuls.
De plus, si A est une matrice triangulaire, A est dite unipotente si ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Définition 7.3.2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $k \in [|1, n|]$, on appelle mineur principal d'ordre k de A et on note Δ_k le déterminant : $\det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$.
Par convention, on pose $\Delta_0 = 1$.

Théorème 7.3.1. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.*
Alors on a :

$$(i) \quad \forall k \in [|1, n|],\ \Delta_k \neq 0 \iff \exists\, (L, U) \in GL_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } A = LU$$

avec L une matrice triangulaire inférieure unipotente et U une matrice triangulaire supérieure.
(ii) cette décomposition est unique.
(iii) la diagonale de U est $\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Ainsi, si A vérifie les hypothèses de l'algorithme de décomposition LU, $\det(A) = \prod_{1 \le i \le n} \frac{\Delta_i}{\Delta_i - 1}$.

Démonstration. Soit $A_n \in GL_n(\mathbb{K})$, avec Δ_k non nul pour tout $k \in [|1, n|]$. Commençons par prouver (i). Prouvons le sens direct par récurrence sur n.
L'initialisation est immédiate. Supposons donc (i) vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (i) reste vraie pour $n + 1$.
Soit $A_{n+1} \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ avec tous ses mineurs principaux non nuls. Alors

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & Y_n \\ X_n & a_{n+1} \end{pmatrix},$$

avec $A_n \in GL_n(\mathbb{K}),\ Y_n \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ X_n \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Les n premiers mineurs principaux de A_{n+1} sont les mineurs principaux de A_n (qui sont tous non nuls par hypothèse). Ainsi, par hypothèse A_n admet une décomposition $L_n U_n$. On peut donc réécrire

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} L_n U_n & Y_n \\ X_n & a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

En posant

$$L_{n+1} = \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ X_n U_n^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_{n+1} = \begin{pmatrix} U_n & L_n^{-1} Y_n \\ 0 & a_{n+1} X_n A^{-1} Y_n \end{pmatrix}$$

(U_n^{-1}, L_n^{-1} existe bien car $A \in GL_n(\mathbb{K})$), on obtient bien $A_{n+1} = L_{n+1} U_{n+1}$.
Ainsi (i) est vérifié pour $n + 1$ ce qui conclut cette récurrence et donc la preuve du sens direct.

Prouvons maintenant le sens indirect de (i). Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ se décomposant en LU. Soit $k \in [|1, n|]$, de la même manière que précédemment, on réécrit

$$A = \begin{pmatrix} A_k & Y_k \\ X_k & Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ B & L_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & C \\ 0 & U_{n-k} \end{pmatrix}$$

avec B, C quelconques. Ainsi, $A_k = L_k U_k$, d'où $\det(A_k) = \det(L_k)\det(U_k)$. Or, L_k est triangulaire inférieure unipotente, donc $\det(L_k) = 1$ et $\det(U) = \det(U_k)\det(U_{n-k})$. Comme A est inversible, par intégrité de $\mathbb{K}$, $\det(U_k) \neq 0$. Ainsi $\det(A_k) \neq 0$, ce qui conclut la preuve du sens réciproque de (i).

Prouvons l'unicité de la décompostion LU (ii).
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admettant deux décompositions LU et $L'U'$. Alors $L'^{-1}L = U'U^{-1} = M$. Donc M est une matrice unipotente triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, ce qui implique $M = I_n$, d'où on déduit $L = L'$ et $U = U'$, ce qui conclut la preuve de (ii).

Prouvons maintenant (iii). Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admettant une décomposition LU. On a vu que $\forall k \in [|1, n|],\ \Delta_k = \det(A_k) = \det(L_k)\det(U_k)$, d'où $\det(U_k) = \Delta_k$. U_k étant triangulaire, on obtient $\det(U_k) = \Delta_1 \times \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \times \cdots \times \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ en développant par les lignes. Ce qui conclut la preuve de (iii).

$\square$

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ admettant une décomposition LU, voici un algorithme permettant d'obtenir les matrices de sa décomposition.

```python
def lu_decomposition(A):
    """
    Effectue la decomposition LU d'une matrice carree A.
    Renvoie les matrices L et U.
    """
    n = len(A)
    L = [[0.0] * n for i in range(n)]
    U = [[0.0] * n for i in range(n)]

    for i in range(n):
        # Uppper Triangular
        for k in range(i, n):
            # Somme des produits L[i][j] et U[j][k]
            s = sum(L[i][j] * U[j][k] for j in range(i))
            # U[i][k] est A[i][k] moins la somme
            U[i][k] = A[i][k] - s

        # Lower Triangular
        for k in range(i, n):
            if i == k:
                L[i][i] = 1.0  # Diagonal as 1
            else:
                # Somme des produits L[k][j] et U[j][i]
                s = sum(L[k][j] * U[j][i] for j in range(i))
                # L[k][i] est (A[k][i] moins la somme) divise par U[i][i]
                L[k][i] = (A[k][i] - s) / U[i][i]

    return L, U
```

Cet algorithme a une complexité générale de $O(n^3)$, ce qui n'est pas meilleure que l'algorithme de Gauss. Mais dans certains cas, les matrices L, U peuvent être plus faciles à calculer, ce qui peut donner une meilleure complexité.

Chapitre 8

Correction des exercices

8.1 Permutations

3.2.1. Essayons de construire une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ pour voir ce qu'il se passe. Prenons $x_1 \in [|1,n|]$, nous avons n possibilités pour choisir x_1. Puis, une fois choisie, nous avons $n-1$ choix pour son image. Posons donc $\sigma(x_1) = x_2$. Il nous reste alors $n-2$ choix pour l'image de x_2. Si nous itérons l'opération, nous voyons que nous avons $n!$ choix pour construitre σ. Donc $\mathfrak{S}_n$ contient $n!$ éléments.

3.2.2. i) Pour déterminer $\#P_k(n)$, construisons $\sigma \in P_k(n)$. Premièrement, il nous faut choisir un ensemble $K \subset [|1,n|]$ à k éléments, de sorte que $\sigma\big|_K = Id$. Or, pour choisir K, nous avons exactement $\binom{n}{k}$ possibilités ! Enfin, il nous reste à choisir les images de σ sur $[|1,n|]$
K. Or nous avons exactement D_{n-k} manière de choisir ces images. On conclut donc que $\#P_k(n) = \binom{n}{k}D_{n-k}$.
ii) On sait que $!n = \#\mathfrak{S}_n$. Cherchons donc à découper $\mathfrak{S}_n$ en unions disjointes, de sorte à obtenir une égalité sur les cardinaux. Remarquons que

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(n),$$

de plus c'est une union disjointe, ce qui, en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux, nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{k=0}^{n} \#P_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k. \end{aligned}$$

iii) On applique la formule d'inversion de Pascal avec $a_n = n!$ et $b_n = D_n$:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Calculer la probabilité de piocher un dérangement dans $\mathfrak{S}_n$, lorsque $n \to +\infty$, revient à calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!} &= \lim_{n\to+\infty} n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} \\ &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

On a alors reconnu le développement en série de $\exp(-1)$, ce qui nous permet de conclure en disant que cette probabilité est de $\frac{1}{e}$.

3.2.3. Il nous faut tout d'abord choisir un ensemble à p éléments dans $[|1, n|]$. Nous avons $\binom{n}{p}$ manières de choisir cet ensemble. Pour le choix du premier élément de notre cycle, nous avons p choix, puis $p-1$ pour le deuxième ... Enfin, il y a p manières d'écrire un p-cycle. Donc le nombre de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$ est $\frac{\binom{n}{p}p!}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p}$.

3.2.4. On étudie $\sigma^k(1)$, et on observe qu'il forme le 6-cycle $\gamma = (1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5)$. Par chance, tous les éléments de $[|1, 6|]$ sont dans le support de γ. Donc, $\sigma = \gamma$. Si tout les éléments de $[|1, 6|]$ n'étaient pas dans le support de γ, alors on aurait répéter la même méthode sur les éléments manquants.
Décomposons σ en produit de transpositions : $\sigma = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$, on trouve que $\varepsilon(\sigma) = 1$.
Enfin, cette affirmation ce justifie par un calcul directe.

3.2.5. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et $k \in [|1, n|]$. Soit α le plus petit entier naturel non nul tel que $\sigma^\alpha = Id$ (il existe comme $\sigma^{n!} = Id$). On considère alors le cycle $\gamma_k = (\sigma(k)\ \sigma^2(k)\ \ldots\ \sigma^{\alpha-1}(k))$. Si k et l sont différents et dans $[|1, n|]$, alors les cycles γ_k et γ_l sont soit à supports disjoints, soit à supports confondus. S'ils sont à supports disjoints, alors on fait le produit des deux, et on recommence l'opération avec $m \notin k, l$, sinon on garde uniquement γ_k et on recommence avec m. De cette manière, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints. Donc l'ensemble des cycles à supports disjoints engendre bien $\mathfrak{S}_n$.

3.2.6. On a vu dans l'exercice 3.2.4 qu'un produit de cycles à supports disjoints est commutatif, d'où : $\sigma^m = \gamma_1^m \gamma_2^m \ldots \gamma_p^m$. Comme les cycles sont à supports disjoint, $\sigma^m = Id \iff \forall j \in [|1, p|], \gamma_j^m = Id$. Il vient directement que $\sigma^m = Id \iff m$ divise $i_1 i_2 \dots i_p$. Or comme par définition de l'odre, si σ est d'odre m, m est le plus petit entier à vérifier cette condition, on a donc $m = \text{ppcm}(i_1, \dots, i_p)$.

3.2.7. Nous allons démontrer ce résultat dans un cadre plus général. Soit $(G, \cdot)$ un groupe quelconque, on notera 1 son élément neutre. Soient $x, y \in G$, on note m l'odre de xy et n l'ordre yx (le cas où n ou m est infini étant trivial, il ne sera pas traité). Raisonnons par l'absurde, on peut supposer sans perte de généralité que $m < n$. On a alors $(xy)^m = 1$ et $(yx)^n = 1$. Or,

$$\begin{aligned} 1 &= (yx)^n \\ &= \underbrace{yxyxyx \dots yx}\, n \text{ fois} \\ &= yxy \underbrace{xyxy \dots xyxy}_{m \text{ fois}} \dots xyx \\ &= \underbrace{yxyxyx \dots yx}_{n \pmod m \text{ fois}} \end{aligned}$$

C'est absurde car $n \pmod m < n$ et donc par définition de l'ordre, $(yx)^{n \pmod m} \neq 1$. Donc on a prouvé que $m = n$, ce qui conclut l'exercice.

3.2.8. Montrons ce résultat dans un cadre plus général. Soient G un groupe fini, $\mathbf{e}$ son neutre et un élément x de G d'ordre (fini) k. Montrons que $X = \left\{x^i \mid 1 \leq i \leq k\right\}$ est un sous-groupe de G.
Il est évident que $\mathbf{e}$ appartient à X. Soit $a, b \in X$, alors $a = x^\alpha$ et $b = x^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Donc $ab = x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha+\beta \pmod k}$. Or, $\alpha + \beta \pmod k < k$, donc $ab \in X$. De plus, soit $y = x^p \in X$, avec $1 \leq p \leq k$. Alors, $y^{-1} = x^{k-p}$ vérifie $yy^{-1} = x^{k-p+p} = y^{-1}y = x^k = \mathbf{e}$. Donc X est bien un sous-groupe de G. Montrons maintenant que $\langle x \rangle = X$. Par définition $\langle x \rangle \subseteq X$. Soit $y \in X$, alors $y = x^l$, or $x \in \langle x \rangle$ et comme c'est un groupe $y = x^l \in \langle x \rangle$. Donc $\langle x \rangle \supseteq X$. On a donc montré que $X = \langle x \rangle$ par double inclusion.

3.2.9. Soit $i \in [|1, n|]$, si $i \notin \{a_1, \dots, a_p\}$, alors $\sigma(a_1, \dots, a_p)\sigma^{-1}(i) = i$. Sinon, prenons $\sigma(i)$, en évaluant notre expression, on obtient $\sigma(a_1, \dots, a_p)\sigma^{-1}(\sigma(i)) = \sigma(a_{i+1})$. Il s'ensuit que $\sigma(a_1, \dots, a_p)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_p))$. Comme toutes les permutations se décomposent en produits de cycles à supports disjoints, alors on peut conjuguer toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ de la même manière que pour le cycle $(a_1, \dots, a_p)$. On en déduit donc que $Z(\mathfrak{S}_n) = \{Id\}$.

3.2.10. Il est évident que Id appartient à $\mathfrak{A}_n$ et que pour tout x, y dans $\mathfrak{A}_n$, leur produit reste dans $\mathfrak{A}_n$. De plus, si σ est dans $\mathfrak{A}_n$, alors $\sigma\sigma^{-1} = Id \implies \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1 \implies \varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$. On a donc montré que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe. Si f est un morphisme de G dans H, alors $\forall g \in G$, $f(g \ker(f) g^{-1} = f(g)f(g^{-1}) = e$. Donc $g \ker(f) g^{-1} \supset \ker(f)$. L'inclusion inverse est triviale, il s'ensuit donc que $\ker f \lhd G$. Comme $\mathfrak{A}_n = \ker \varepsilon$, alors $\mathfrak{A}_n \lhd \mathfrak{S}_n$.

3.2.11. Soient $(i\ j), (k\ l)$, avec $i \neq j \neq k \neq l$, deux transpositions de $\mathfrak{A}_n$, alors $(i\ j)(k\ l) = (j\ k\ i)(j\ k\ l)$. Comme $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les produits de transpositions $(i\ j)(k\ l)$, alors $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
Montrons maintenant que $\mathfrak{S}_n$ n'est pas résoluble. Soient $a, b, c, d, e \in [|1, 5|]$, tous différents. Alors, $[(a\ b\ c), (c\ d\ e)] = (a\ b\ c)(c\ d\ e)(a\ b\ c)^{-1}(c\ d\ e)^{-1} = (a\ b\ c)(c\ d\ e)(c\ b\ a)(e\ d\ c) = (a\ d\ c)$. Donc $D(\mathfrak{A}_5)$ contient tous les 3-cycles, d'où $D(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{A}_5$. Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathfrak{A}_5 = D^n(\mathfrak{A}_5) \subseteq D^n(\mathfrak{S}_5)$, ce qui conclut la preuve de la non-résolubilité de $\mathfrak{S}_5$.

3.2.12. Fixons $x \in X$. On notera $H = \text{Stab}(x)$ et $O = \text{Orb}(x)$. Remarquons que $H \lhd G$.
Montrons que :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G/H & \longrightarrow & X \\ & \overline{g} & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

est une bijection, ce qui prouvera cette formule.
Premièrement, vérifions qu'elle est bien définie : soient $g_1, g_1 \in \overline{g}$, alors $\exists h \in G$ tel que $g_1 = g_2 * h$. Alors $\psi(g_1) = g_1 \cdot x = (g_2 * h) \cdot x = g_2 \cdot (h \cdot x) = g_2 \cdot x = \psi(g_2)$. Donc ψ est bien définie.
Deuxièmement, vérifions que ψ est injective : soient $g_1, g_2 \in G$ tel que $\psi(g_1) = \psi(g_2)$. Alors :

$$\begin{aligned} & \psi(g_1) = \psi(g_2) \\ \iff & g_1 \cdot x = g_2 \cdot x \\ \iff & (g_1 * g_2^{-1}) \cdot x = x. \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} & \psi(g_1) = \psi(g_2) \\ \iff & g_1 \cdot x = g_2 \cdot x \\ \iff & (g_2^{-1} * g_1) \cdot x = x. \end{aligned}$$

Ainsi $g_1 * g_2^{-1} \in H \Rightarrow g_1 H \subset g_2 H$ et réciproquement, $g_2 H \subset g_1 H$. Donc par double inclusion, $g_1 H = g_2 H$, ce qui prouve que ψ est injective.
Enfin, la surjectivité de ψ découle de la définition de O.

3.2.13.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid g \cdot x = x\}| &= \frac{1}{|G|} \times |\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \\ &= \sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathrm{Orb}(x)|} \end{aligned}$$

Remarquez que nous avons utilisé la formule des classes pour passer de la ligne 2 à 3.

8.2 Formes n-linéaires alternées

4.3.1. Il suffit d'écrire la définition du produit matriciel et d'effectuer un changement d'indices.

4.3.2. Grâce à l'exercice précédent, il est immédiat que f vérifie ces propriétés.

4.3.3. Pour tout $x \in E$, posons $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Soit $(u, v) \in E \times E$, posons $P(X) = \langle u + Xv, u + Xv\rangle$. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on obtient $P(X) = 2X\langle u, u + Xv\rangle = X^2\langle v, v\rangle + 2X\langle u, v\rangle + \langle u, u\rangle$. Par définition du produit scalaire, P est positif sur $\mathbb{R}$. Donc son déterminant $\Delta = 4\langle u, v\rangle - 4\langle v, v\rangle \cdot \langle u, u\rangle$, est négatif. On obtient alors $\langle u, v\rangle \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$, ce qui nous donne en prenant la racine de l'égalité : $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

4.3.4. On notera $M_n(\mathbb{R})^*$, la base duale de $M_n(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $f \in M_n(\mathbb{R})^*$ tel que $\mathcal{H} = \ker f$. Nous allons tenter d'obtenir une expression plus explicite de f. Pour ce faire, prouvons que l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R})^* \\ & A & \longmapsto & (f_A : M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)) \end{array}$$

est surjective. Etant donné que $\dim(M_n(\mathbb{R})) = \dim(M_n(\mathbb{R})^*)$[1], alors ϕ est surjective si et seulement si ϕ est injective[2]. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $f_A = 0$. Donc $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AB) = 0$. En remplaçant B par ${}^tA$, on reconnait alors un produit scalaire. Grâce aux propriétés des produits scalaires, on obtient que $A = 0$, donc $\ker \phi = \{0\}$ et ϕ est injective, puis surjective (donc bijective). Fixons maintenant

$A \in M_n(\mathbb{R})$, tel que $\mathcal{H} = \ker f_A$. Supposons par l'absurde que $\mathcal{H} \cap GL_n(\mathbb{R}) = \varnothing$. Ainsi, $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AM) \neq 0$. Prenons alors $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $PAQ = J_r$ où $r = \mathrm{rg}(A)$ et où $J_r = (\delta_{i,j+1 \pmod n})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$[3]. Alors $f_A(PQ) = \mathrm{Tr}(APQ) = \mathrm{Tr}(PAQ) = \mathrm{Tr}(J_r) = 0$. Donc $PQ \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}$, ce qui est absurde par hypothèse !

8.3 Déterminant

5.8.1. Comme indiqué, considérons le polynôme suivant :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & X_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Attention, c'est bien un polynôme et non une matrice, ne vous laissez pas impressionner ! Si on développe par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$P = (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} + \dots + X^{n-1}(-1)^{n+n} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_{n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \tag{8.1}$$

On remarque ainsi que le degré de P est au plus égal à $n-1$. Or, le caractère alterné du déterminant nous donne que $P(a_i) = 0, \ \forall i \in [|1, n|]$. On peut alors conclure que P est de degré $n-1$ et que nous pouvons l'écrire de la manière suivante :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i). \tag{8.2}$$

Si l'on note D_n, le déterminant de Vandermonde à l'ordre n, on à l'égalité suivante : $P(a_n) = D_n$. D'après (8.1), nous observons que $\lambda = D_{n-1}$, ce qui en nous servant de (8.2) nous permet d'établir la relation de récurrence suivant :

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \\ &= \prod_{i=1}^{1} (a_2 - a_i) \times \dots \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} a_j - a_i \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i. \end{aligned}$$

Si vous n'êtes pas convaincu, ce résultat se démontre très bien par récurrence sur j.

1. Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E avec $e_i^*(e_j) := \delta_{ij}$.
2. En utilisant le théorème du rang.
3. L'existence de P, Q vérifiant cette relation est donnée par le théorème d'équivalence par le rang ($\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg}(J_r)$).

5.8.2. Nous allons appliquer la même technique en remplaçant notre déterminant par la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+X} \end{vmatrix}.$$

Cela marche également si vous avez remplacé a_n. Le but étant de travailler sur l'exterieur du déterminant afin d'obtenir une relation de récurrence. Pour cet exercice, je vais aller un peu plus vite car vous devriez déjà être plus à l'aise avec ce type de manipulations. En développant $F(X)$ par rapport à la dernière colonne, et en réduisant au même dénominateur, on obtient alors :

$$F(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\Delta_{i,n}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j+X)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+X)}. \tag{8.3}$$

On notera P, le polynôme au numérateur. On remarque immédiatement que P est de degré $n-1$ et que ses racines sont $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Donc :

$$F(X) = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(X-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(X+a_i)}$$

Essayons d'identifier λ, pour ce faire retournons à la forme première de F afin d'y faire des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

$$F(X)(a_n+X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+X}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+X}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(X-b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(X+a_i)}.$$

On évalue cette expression en $-a_n$ et on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix} = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n+a_i)}.$$

D'où, si l'on note le déterminant de Cauchy à l'ordre n C_n :

$$\lambda = C_{n-1}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n+a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n-b_i)}.$$

Remplaçons λ dans notre expression initiale :

$$C_n = F(b_n) = C_{n-1}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n+a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(-a_n-b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n+a_i)} \times \frac{1}{a_n+b_n}.$$

Avec un tout petit peu d'intuition et de calcul, on en déduit la relation de récurrence suivante :

$$C_n = C_{n-1}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)} \times \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)} \times \frac{1}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}.$$

Encore une fois, je vous laisse vérifier ce résultat par réccurence si vous y tenez.

5.8.3. Commençons par démontrer l'égalité suggérée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $E = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$. On voit alors directement que $|E| = n$.
Réécrivons maintenant E d'une autre manière, en réduisant toutes les fractions sous forme irréductible :

$$\bigcup_{d|n}\left\{ \ \frac{k}{d} \mid k \in [|1, n|] \ et \ k \wedge n = 1\right\}$$

C'est une union disjointe donc rien de plus facile que de calculer son cardinal :

$$|E| = \sum_{d|n}\left|\left\{ \ \frac{k}{d} \mid k \in [|1, n|] \ et \ k \wedge n = 1\right\}\right| = \sum_{d|n}\varphi(d).$$

Si vous n'avez pas compris le passage à φ, je vous invite à regarder la définition de $\varphi(n)$. Sinon, tant mieux !
Essayons maintenant d'écrire notre matrice avec notre nouvelle formule :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, \ pgcd(i,j) = \sum_{d|pgcd(i,j)} \varphi(d)$$

Pas très pratique n'est-ce pas ! Comme i et j varient entre 1 et n, nous pouvons un peu arranger notre formule :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, \ pgcd(i,j) = \sum_{\substack{d=1 \\ d|pgcd(i,j)}}^{n} \varphi(d).$$

Presque super ! Mais la condition $d|pgcd(i,j)$ nous embête toujours. Pour s'en débarraser, posons :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ \ i|j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ce qui nous permet maintenant de réécrire :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, \ pgcd(i,j) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\delta_{di}\delta_{dj}.$$

Hummm, cette formule ne vous fait donc penser à rien ? On dirait un petit peu (un tout petit peu) la formule du produit matriciel.
Essayons alors d'écrire notre matrice de départ comme un produit :

$$pgcd(i,j)_{1\leq i,j\leq n} = \left(\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\delta_{di}\delta_{dj}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$
$$= AB$$

avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_i j)_{1 \leq i,j \leq n}$.
Par identification, on trouve : $a_{ij} = \varphi(j)\delta ji$ et $b_{ij} = \delta_{ij}$. Ouf ! nous pouvons enfin finir en utilisant les propriétés du déterminant :

$$\begin{aligned}
\det\left(pgcd(i,j)_{1 \leq i,j \leq n}\right) &= \det(AB) \\
&= \det(A)\det(B) \\
&= \det \begin{pmatrix} \varphi(1) & 0 & \dots & 0 \\ ? & \varphi(2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & \dots & ? & \varphi(n) \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & ? & \dots & ? \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi(n).
\end{aligned}$$

5.8.4. On remarque que Δ_n est semblable au déterminant de Vandermonde. Essayons donc de nous ramener à ce dernier.
S'il existe $i \in [|0,n|]$ tel que $x_i = 0$, alors Δ_n est nul. Supposons donc $x_i \neq 0$, pour tout i dans $[|0,n|]$. En factorisant chaque ligne par x_i^n, on obtient :

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} x_i^n \times \begin{vmatrix} 1 & \frac{y_0}{x_0} & \dots & \frac{y_0^{n-1}}{x_0^{n-1}} & \frac{y_0^n}{x_0^n} \\ 1 & \frac{y_1}{x_1} & \dots & \frac{y_1^{n-1}}{x_1^{n-1}} & \frac{y_1^n}{x_1^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{y_n}{x_n} & \dots & \frac{y_n^{n-1}}{x_n^{n-1}} & \frac{y_n^n}{x_n^n} \end{vmatrix},$$

ce qui est un déterminant de Vandermonde où les inconnues sont $\frac{y_i}{x_i}$.
Ainsi, $\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{y_j}{x_j} - \frac{y_i}{x_i}$.

5.8.5. Remarquons que

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons J, la première matrice de cette somme (observons que ce sont des matrices de permutations). Alors on observe que J^i est la i-ème matrice de cette somme (autrement dit, les matrices dans la décomposition de A ci-dessus, sont les éléments de l'orbite de J). Nous avons donc obtenu que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.$$

Intéréssons nous au polynôme caractéristique de J :

$$\chi_J = \begin{vmatrix} X & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & -1 \\ -1 & & & X \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, puis en appliquant un n-cycle aux colonnes de la matrice, on obtient (avec $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$) :

$$\chi_J = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \zeta^k).$$

C'est un polynômes scindé à racine simple, et donc les valeurs propres de J sont ζ^k pour $0 \leq k \leq n-1$. Posons donc $D = (\zeta^{i-1}\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, tel que $A = PDP^{-1}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PAP^{-1}) \\ &= \det\left(P\sum_{k=0}^{n-1} a_0 J^k P^{-1}\right) \\ &= \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_0 D^k\right) \\ &= \prod_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^{hk}\right) \text{[1]}. \end{aligned}$$

5.8.6. Remarquons que $(*)$ est une équation cartésienne d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension p. Il y a donc p suites récurrentes linéaires d'ordre p à valeurs dans $\mathbb{K}$ caractérisées par $(*)$. Notons E_* ce $\mathbb{K}$-ev.

Considérons la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ à valeur dans $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et de terme général $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

On a alors la relation de récurrence suivant : $U_{n+1} = AU_n$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par une récurence triviale, on obtient donc $U_{n+1} = A^n U_0$. Tentons donc de diagonaliser A afin de calculer ses puissances. En développant χ_A par rapport à sa première ligne, on obtient :

$$\chi_A = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k.$$

1. Car le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses termes diagonaux.

Posons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Alors $(*) \iff f^p(u) = a_0 f^0(u) + a_1 f(u) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(u)$, ainsi $u = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifie $(*)$ se traduit par $\chi_A(f)(u) = 0$.

Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut réécrire :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_k)^{m_k},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont les racines de χ_A de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_d$. En appliquant le Lemme des Noyaux, on obtient que

$$\ker\left(\chi_A(f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{d} \ker\left(f - \alpha_i Id\right)^{m_i}.$$

Nous cherchons donc une base de $\ker\left(f - \alpha_i Id\right)^{m_i}$.

- Si $m_i = 1$: alors $f(u) = \alpha_i u \iff \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \alpha_i u_n$. Ainsi, u est une suite géométrique de terme principal $u_n = \lambda \alpha_i^n$ où λ est une constante.
- Si $m_i \geq 1$: nous pouvons réutiliser l'idée des suites géométriques mais en les "dérivant" successivement. Ainsi $\ker\left(f - \alpha_i Id\right)^{m_i}$ sera engendrée par $\left(\lambda \alpha_i^n\right)_{n\geq 0}, \left(\lambda n \alpha_i^n\right)_{n\geq 0}, \left(\lambda n^2 \alpha_i^n\right)_{n\geq 0}, \ldots \left(\lambda n^{m_i - 1} \alpha_i^n\right)_{n\geq 0}$.

En réunissant toutes ces bases, on trouve alors une base de E_*.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{m_i - 1} \lambda_{i,j} n^j \alpha_i^n$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il nous faudra distinguer racines réelles et complexes. Si $z \in \mathbb{C}$ est racine de χ_A, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ vérifie $(*)$. En écrivant $z = \rho e^{i\theta}$, on développe $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. Ainsi, $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\geq 0}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\geq 0}$ vérifient $(*)$ et ne sont pas colinéaires. Ainsi, si les α_i pour $1 \leq i \leq d$ sont les racines réelles de χ_A et de multiplicité m_i ; et que $\rho_j e^{\pm i\theta_j}$ pour $1 \leq j \leq q$ sont les racines complexes de χ_A de multiplicité t_j, alors

$$u_n = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{m_i - 1} \lambda_{i,j} n^j \alpha_i^n + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{t_i - 1} \rho_i^n n^j (\mu_{i,j} \cos(n\theta_i) + \gamma_{i,j} \sin(n\theta_i)).$$

8.4 Différentielle du déterminant

6.3.1. On pose $g : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, tel que $g(x) = e^{xA}$. det et g sont C^1 sur $\mathbb{R}$, donc leur composition aussi. Soient $x, h \in \mathbb{R}$, on peut donc utiliser la formule donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
df_x(h) &= D_f(x) \cdot h \\
&= D(\det \circ g)(x) \cdot h \\
&= D_{\det}(g(x)) \cdot D_g(x) \cdot h \\
&= \underbrace{D_{\det}(g(x)) A e^{xA}}_{d\det_{g(x)}(Ae^{xA})} \cdot h \\
&= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(g(x)) A e^{xA}) \cdot h \\
&= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(e^{xA}) A e^{xA}) \cdot h \\
&= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(e^{xA}) e^{xA} A) \cdot h \\
&= \mathrm{Tr}(\det(e^{xA}) A) \cdot h \\
&= f(x) \cdot \mathrm{Tr}(A) \cdot h.
\end{aligned}$$

6.3.2. Observons que $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. De plus, dans $\mathbb{R}$ muni de sa métrique habituelle, $\mathbb{R}^*$ est un ouvert, ce qui nous donne que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert (dense) de $M_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

[1] Christophe Bertault. *Déterminant.* url : http://christophebertault.fr/documents/coursetexercices/Cours%20-%20Determinants.pdf.

[2] Phil Caldero. *Formule de Binet-Cauchy (par la face sud).* url : https://www.youtube.com/watch?v=WMeYpEBe2Do.

[3] Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes.* Calvage Mounet, 2016.

[4] Jean Dieudonné. "Les déterminants sur un corps non commutatif". In : *Bulletin de la S.M.F.* 71 (1943).

[5] eDukaty. *Calcul différentiel - Différentiel du déterminant - Séminaire eDukaty.* url : https://www.youtube.com/watch?v=yp6iNlIIy94.

[6] Université Claude Bernard–Lyon I. *Déterminant en Géométrie.*

[7] *Mathématiques D - 2023.* url : https://cpge-paradise.com/Concours2023/X/MathD2023.pdf.