Notes trigonométriques

A. DECK

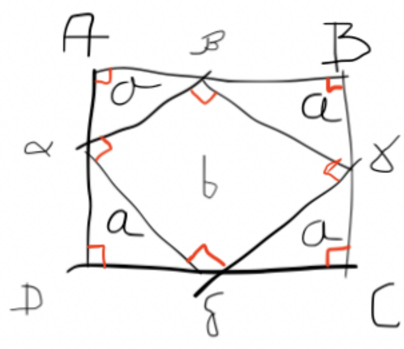
Février 2023

Préambule

Cette note n'a pas vocation à être un cours sérieux. Elle vise à introduire quelques concepts basiques de trigonométrie.
Avant de commencer, il est important de s'accorder sur quelques mots de vocabulaire.
Dessinez sur votre feuille un triangle ABC, rectangle en B. Alors le côté AC, opposé à l'angle droit du triangle est appelé **hypoténuse**. Le côté **opposé** à un angle, dans un triangle rectangle, est le côté qui ne touche pas cet angle. Par exemple, dans notre triangle, le côté opposé à l'angle $\hat{A}$ est BC. Le côté **adjacent** à un angle, dans un triangle rectangle, est le côté qui touche l'angle mais qui n'est pas l'hypoténuse.
Mettons en pratique ce nouveau vocabulaire et démontrons le théorème de Pythagore.

Théorème Pythagore. *Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.*
Autrement dit : si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Démonstration. Pour cette démonstration, je me contenterai d'un croquis. A vous de rédiger cela formellement si vous le souhaitez.



Indice : écrivez ce que vaut l'aire du carré $ABCD$ de différentes manières. ∎

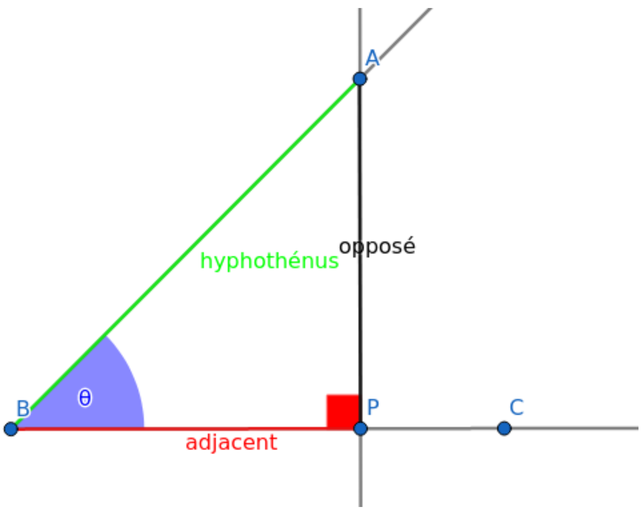
1 Introduction

Dans cette note, nous allons essentiellement parler des fonctions trigonométriques.
Alors, commençons par définir ce que sont cos (cosinus), sin (sinus) et tan (tangente).
Ces trois fonctions s'appliquent à des angles (exprimés en radians) et sont définies ci-dessous.

Soit θ un angle quelconque exprimé en radians, alors :

$$\cos\theta = \frac{adjacent}{hypotenuse}$$
$$\sin\theta = \frac{oppose}{hypotenuse}$$
$$\tan\theta = \frac{oppose}{adjacent}$$

Représentons cela sur une figure géométrique :



Ici, $\theta = \widehat{ABC}$. On place P, le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On obtient alors le triangle BAP rectangle en P.
On peut alors calculer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle θ par :

$$\cos\theta = \frac{BP}{BA}$$
$$\sin\theta = \frac{AP}{BA}$$
$$\tan\theta = \frac{AP}{BP}$$

On observe également :

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{AP}{BA}}{\frac{BP}{BA}} = \frac{AP}{BP} = \tan\theta$$

Néanmoins, ces premières définitions ne nous permettent que de manipuler des angles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. Si l'on considère un point $A(x_A, y_A)$ sur le cercle, alors on a :

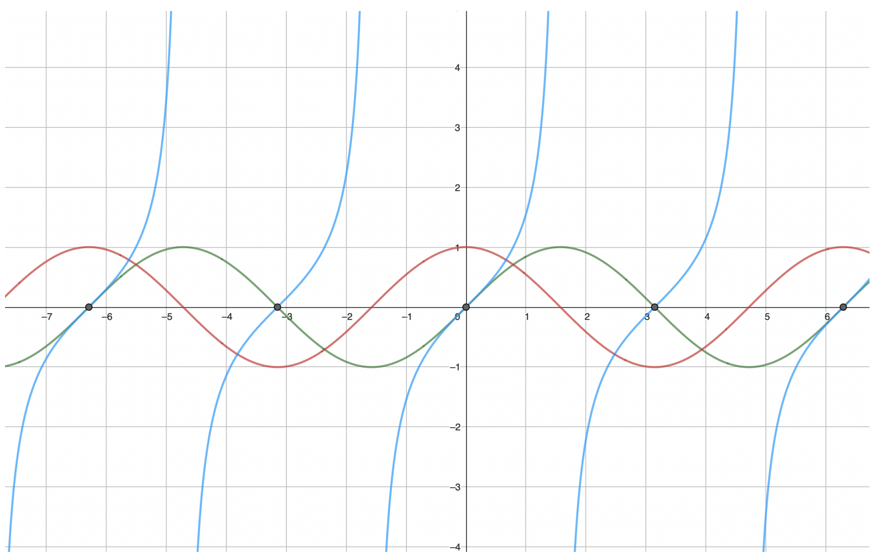
$$\cos(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = x_a \text{ et } \sin(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = y_a$$

Cette définition est simple d'utilisation et permet de manipuler tous les réels positifs ou négatifs.

Nous pouvons également (encore me direz-vous) définir le cosinus et le sinus à partir de séries entières. Je me contenterai de donner leurs définitions sans m'attarder sur ce point. Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

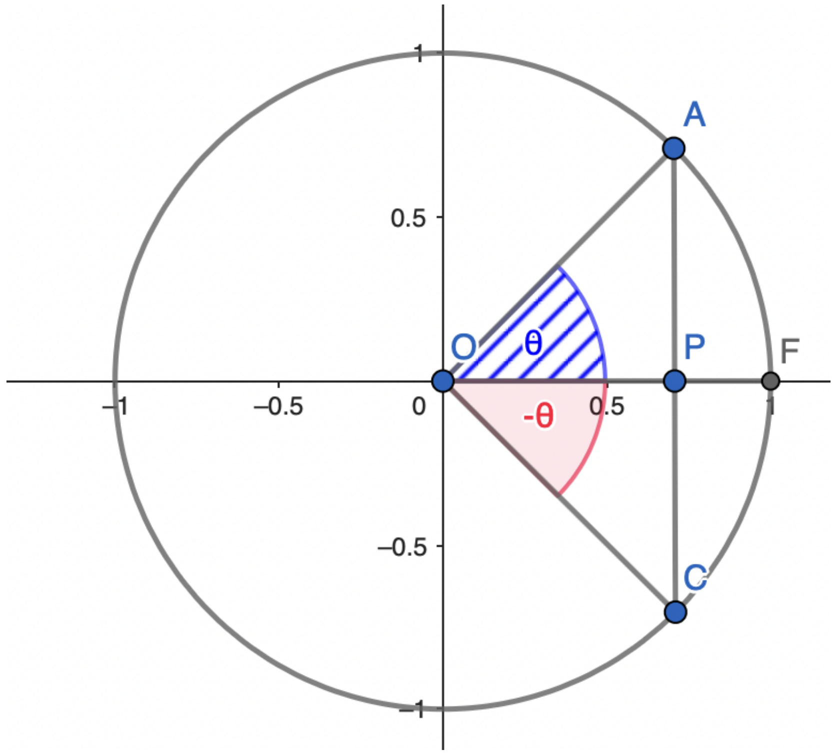
Observons maintenant le graphe de nos trois fonctions trigonométriques.



La courbe de la fonction cos est représentée en rouge, celle de la fonction sin en vert et enfin celle de la fonction tan en bleue. Les points noirs, quant à eux, représentent l'occurence des multiples de π ($\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$).
On remarque que les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques, alors que la fonction tan est π-périodique. Notons également que la fonction tan n'est pas définie sur $\{\frac{\pi}{2}k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Intéressons-nous maintenant à la parité de ces fonctions.
On observe que cos est une fonction paire, tandis que sin et tan sont impaires.

Démonstration. Prouvons que la fonction cos est une fonction paire.
Soit θ un angle quelconque. On se place dans le cercle trigonométrique de centre O. Puis on place les points A, P, F et C selon le dessin suivant :



Comme P est le milieu du segment AC, alors $AP = PC$. On notera cette longueur h. De plus, le cercle trigonométrique ayant pour rayon 1, on a : $OA = OC = 1$. Montrons que $\cos(-\theta) = \cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{h}{OA} = h$$
$$\cos(-\theta) = \frac{h}{OA} = h$$

Conclusion : La fonction cos est une fonction paire.

Prouvons maintenant que la fonction sinus est impaire.
Nous allons procéder par une approche différente, en utilisant la définition de la fonction sinus en série entière :

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\Rightarrow \sin(-\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or on a $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \times (-1) = -1$, donc :

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{-\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

■

Voici un tableau récapitulant les valeurs du sinus et cosinus des angles remarquables :

θ	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\cos\theta$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	0	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Je vous conseille de l'apprendre par coeur.

2 Formules Trigonométriques

Commençons par la formule la plus importante de tout votre cours sur la trigonométrie :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{1}$$

Démonstration. Plaçons nous sur le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1), puis prenons un angle quelconque θ. Nous appellerons O le centre du cercle et A le point correspondant à l'angle sur le cercle. Enfin, nous appellerons le point B, le projeté orthogonal du point A sur la droite d'équation $y = x$. Nous avons donc un triangle ABO rectangle en B. Nous allons utiliser le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} & BO^2 + AB^2 + = AO^2 \\ \iff & \frac{BO^2}{AO^2} + \frac{AB^2}{AO^2} + = \frac{AO^2}{AO^2} \\ \iff & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \end{aligned}$$

■

Voyons maintenant les autres formules qu'il peut être utile de connaître :

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{2}$$

$$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(a) + \cos(b)\sin(b) \tag{3}$$

Démonstration. Nous allons démontrer la formule (2) :

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Plaçons nous sur le cercle trigonométrique. On appellera O, le centre du cercle et $\overrightarrow{i}$ le vecteur de coordonnées $(1; 0)$ (base canonique du plan). Plaçons les points A et B de coordonnées $(\cos(a); \sin(a))$ et $(\cos(b); \sin(b))$. Alors $a = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA})$ et $b = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB})$.
Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}) \\ \iff & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OB}) \\ \iff & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = b - a \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OB}|| \times \cos(\overrightarrow{OA};\,\overrightarrow{OB})\\
\Longleftrightarrow\ &\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos{(b-a)}\\
\Longleftrightarrow\ &\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos{(a-b)}
\end{aligned}$$

Calculons désormais le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ avec les coordonnées des 2 vecteurs ($\overrightarrow{OA} = (\cos(a);\, \sin(a))$ et $\overrightarrow{OB} = (\cos(b);\, \sin(b))$) :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$

On en déduit que :

$$\cos{(a-b)} = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$

■

De ces deux formules, je vous laisse déduire celles de $\sin(a-b)$ *et de* $\cos(a+b)$.

Voici quelques autres formules pouvant s'avérer très utiles :

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \tag{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \tag{5}$$

$$\tan{(a+b)} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b} \tag{6}$$

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}(\cos{(a+b)} + \cos{(a-b)}) \tag{7}$$

$$\cos{(\frac{\pi}{2} - x)} = \sin x \tag{8}$$

$$\sin{(\frac{\pi}{2} - x)} = \cos x \tag{9}$$

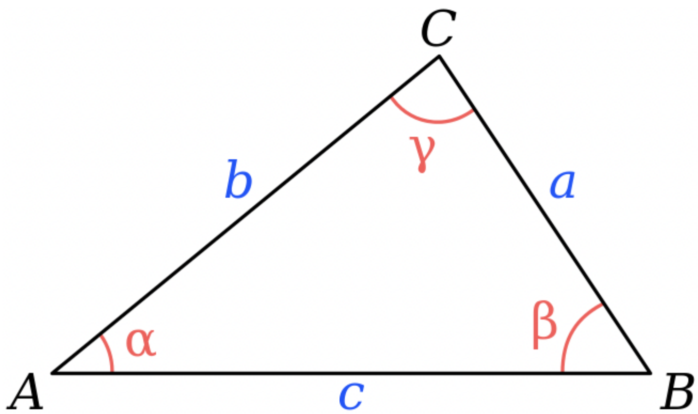
Leurs démonstrations étant purement calculatoires, elles sont laissées au lecteur, en exercice.

Pour finir, si on pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$, alors on a :

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}\\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \tag{10}$$

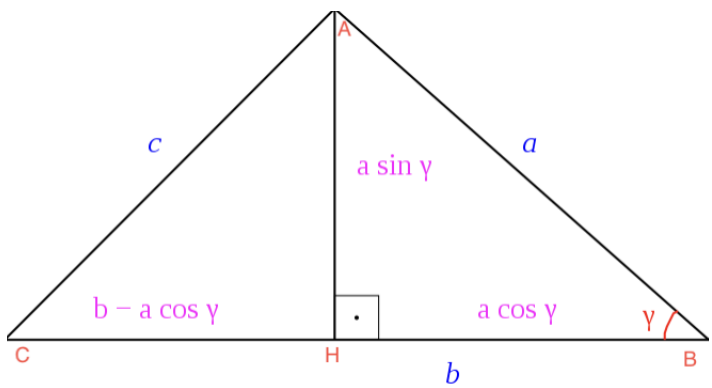
3 Généralisation du théorème de Pythagore : loi des cosinus

L'introduction des fonctions trigonométriques permirent au celèbre mathématicien Al-Kashi de généraliser le théorème de Pythagore à des triangles quelconques.



Théorème d'Al-Kashi. *Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure ci-dessus. Alors, on a : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cos\gamma$.*

Démonstration. Pour mieux comprendre la démonstration, nous allons l'illustrer :



Nous avons ci-dessus un triangle ABC, de côtés a, b, c et d'angles quelconques.
En notant H le projeté orthogonal du sommet A sur le côté opposé BC, on a :

$$\cos\gamma = \frac{AH}{AB}$$
$$\sin\gamma = \frac{HB}{AB}$$

soit, comme le côté AB a pour longueur a :

$$AH = a \times \sin\gamma$$
$$HB = a \times \cos\gamma$$

On en déduit que $CH = b - a\cos\gamma$. On peut ainsi appliquer le théorème de Pythagore sur le triangle

AHC :

$$
\begin{aligned}
& AC^2 = CH^2 + AH^2 \\
\iff & c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2 \\
\iff & c^2 = b^2 - 2ba\cos\gamma + a^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) \\
\iff & c^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2
\end{aligned}
$$

■

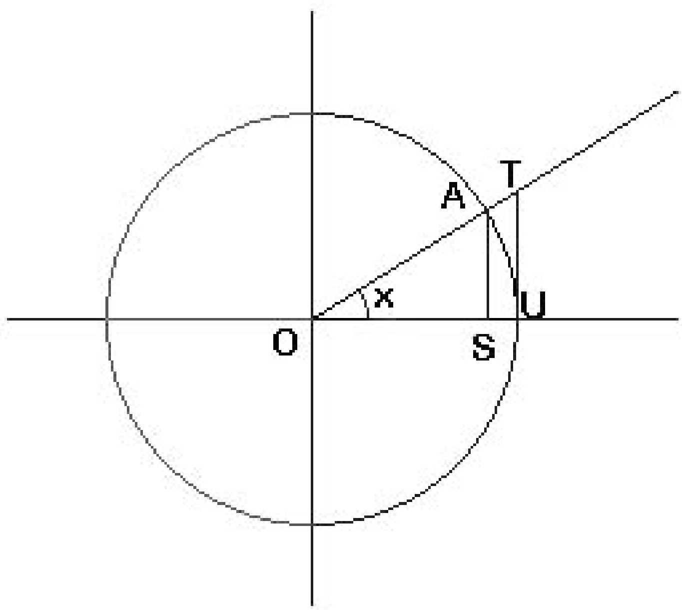
4 Dérivées

Cette section vise à rappeler les dérivées des fonctions trigonométriques.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\tan x)' &= 1 + \tan^2 x
\end{aligned}
$$

Démonstration. Montrons que $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est que sa dérivée est $\cos x$.
Rappel : L'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle au centre θ (en radians) est égale à $\frac{1}{2} \times r^2 \times \theta$.
Plaçons nous sur le cercle trigonométrique et considérons $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:



Le point A a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$ et $UT = \tan x$.
Désignons l'aire du triangle OAS par A_1, l'aire du secteur OAU par A_2 et l'aire du triangle OTU par A_3. Elles vérifient $A_1 < A_2 < A_3$ (cf. la figure ci-dessus). On a ainsi :

$$\begin{aligned}
& A_1 < A_2 < A_3 \\
\iff & \frac{OA \times AS}{2} < \frac{1}{2} \times OA^2 \times x < \frac{UT \times OU}{2} \\
\iff & \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}
\end{aligned}$$

Comme $\sin x \neq 0$ et $\frac{2}{\sin x} > 0$, on multiplie l'inégalité des deux côtés par ce terme :

$$\begin{aligned}
\iff & 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\
\iff & \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin (x)}{x} = 1$$

Or :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin (x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin (x) - \sin (0)}{x - 0} = \sin' (0)$$

par définition. D'autre part, on a $\cos (0) = 1$. Donc la fonction sin est dérivable en 0 et $\sin' (0) = \cos (0)$.

Considérons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$.
Par la relation (3), on a :

$$\sin (a + h) - \sin (a) = \sin a \cos h + \sin h \cos a - \sin a$$

soit

$$\frac{\sin (a + h) - \sin a}{h} = \sin a \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \, \frac{\sin h}{h}$$

et

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin (a + h) - \sin a}{h} = \cos a$$

Donc la fonction $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$.

Les preuves pour les dérivées des fonctions $\cos x$ ainsi que $\tan x$ sont laissées en exercice. ■

5 Fonctions réciproques

Considérons les fonctions :

$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \tan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\sin x}{\cos x} \end{array} \quad .$$

Les fonctions cos et sin sont surjectives. La fonction tan n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas définie sur $\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$, donc elle n'est pas surjective. Néanmoins, si nous définissons une restriction adhoc, nous pouvons les rendre bijectives :

$$\cos : \quad [0,\pi] \quad \longrightarrow \quad [-1,1] \quad , \quad \sin : \quad [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \longrightarrow \quad [-1,1] \quad , \quad \tan : \quad]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\quad \longrightarrow \quad [-1,1].$$

Maintenant que nos trois fonctions sont bijectives, nous pouvons définir leurs réciproques.

Rappel : soit $f : \; [a,b] \; \longrightarrow \; [c,d]$ *, ($a < b$ et $c < d$), une application bijective. Alors il existe une application réciproque à f,* $g : \; [c,d] \; \longrightarrow \; [a,b]$ *telle que $\forall x \in [c,d]$, $f(g(x)) = x$ et $\forall x \in [a,b]$, $g(f(x)) = x$. Par convention, on note g comme f^{-1}.*

On définit alors les fonctions réciproques de cos, sin et tan :

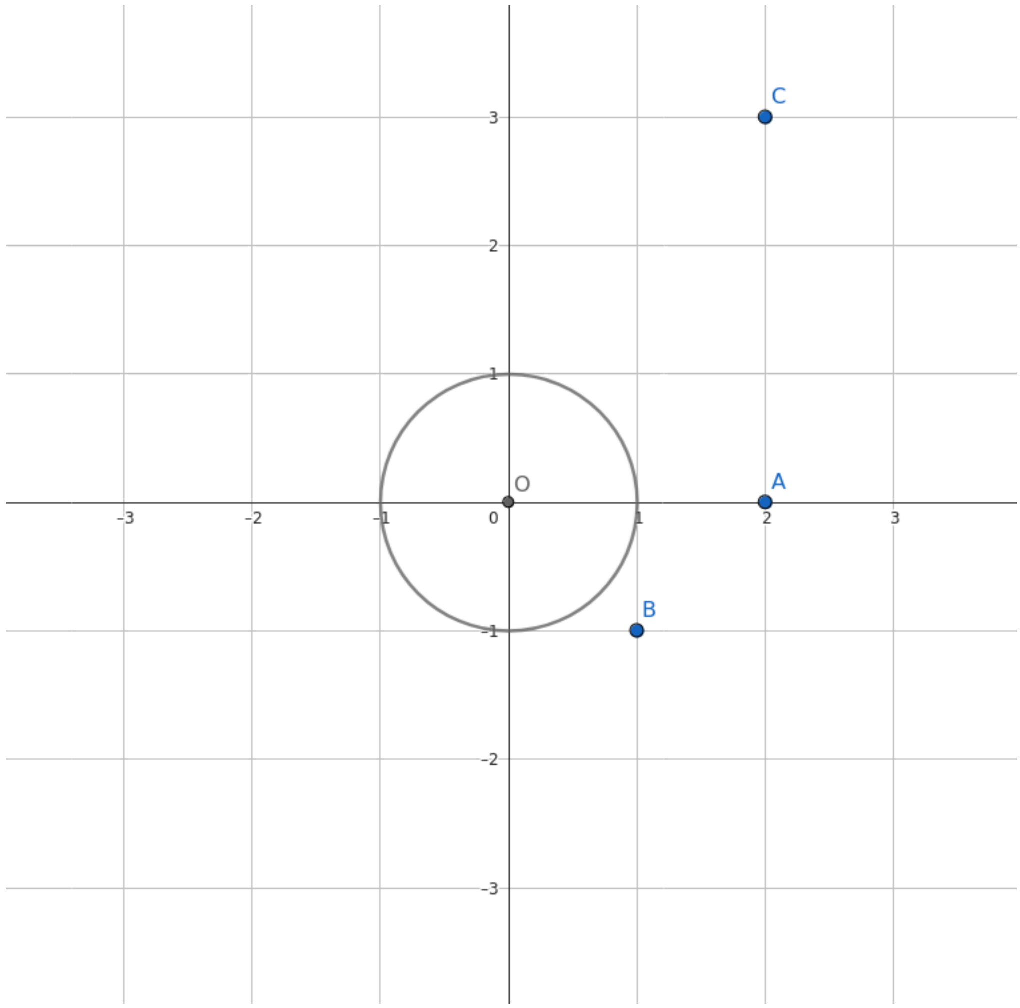
$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \cos^{-1} x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1,1] & \longrightarrow & [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \sin^{-1} x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \tan^{-1} x \end{array} \quad .$$

Les intervalles auxquels j'ai restreint mes fonctions ne sont pas uniques, il en existe une infinité de sorte que les fonctions cos, sin et tan soient bijectives.

6 Nombres complexes

Certains prérequis sont nécessaires pour cette section. Une connaissance minimale des nombres complexes est attendue.

En mathématiques, le plan complexe (aussi appelé plan d'Argand, plan d'Argand-Cauchy ou plan d'Argand-Gauss) désigne un plan, muni d'un repère orthonormé, dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe unique. Le nombre complexe associé à un point est appelé l'affixe de ce point. Une affixe est constituée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire correspondant respectivement à l'abscisse et l'ordonnée du point.
Voici quelques exemples : $A = 2$, $B = 1 - i$, $C = 2 + 3i$ et $D = -3 - 2i$.



Vous remarquerez que le point D n'est pas placé, je vous laisse le faire.

Rappelez-vous que tout nombre complexe $z = a + ib$ peut s'écrire sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $|z|$ le module de z, $|z| := \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ et $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$.
Reprenez la figure précédente et placez-y le point d'affixe $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Vous vous demandez peut-être ce que viennent faire des nombres complexes dans une note trigonométrique. Mais observons plusieurs relations entre la notation $e^{i\theta}$ et les fonctions cos et sin.

Premièrement, voici les deux formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{11}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{12}$$

Les démonstrations de ces formules étant triviales, elles sont laissées en exercice au lecteur.

Ces deux formules couplées à la formule du binôme de Newton permettent de linéariser un certain nombre d'expressions.

Voici la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration. Nous allons effectuer un raisonnement par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : Supposons qu'il existe un entier n tel que la formule du binôme de Newton soit vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
\iff (a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
\iff (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
\iff (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
\iff (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

■

Vous pouvez ressortir cette démonstration lors d'une soirée pour impressioner vos amis avec le signe $\sum$ *!*
Enfin, pour terminer cette courte section, remarquons que $\sin\theta = Im(e^{i\theta})$ et que $\cos\theta = Re(e^{i\theta})$.

7 Intégration : règles de Bioche

Cette section vise à présenter quelques astuces de calcul d'intégrales avec des fonctions trigonométriques, connues sous le nom de règles de Bioche.

Ces règles permettent de calculer des intégrales de fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.
Ces fractions rationnelles sont de la forme : $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, où P et Q sont des polynômes à deux variables et $u = \cos x$; $v = \sin x$. On notera la fonction rationnelle associée à cette fraction rationnelle f.

Les règles de Bioche nous suggèrent des changements de variables judicieux pour intégrer f :
- $f(-x) = -f(x) \to t = \cos x$
- $f(\pi - x) = -f(x) \to t = \sin x$
- $f(\pi + x) = f(x) \to t = \tan x$
- si aucun des trois ne marches on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

8 Exercices

Après l'effort, le réconfort. Il est temps de s'exercer.

Exercice 1

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes : $\tan x$, $\arccos x$, $\arcsin x$ et $\arctan x$.

Exercice 2

Écrire sous forme d'expression algébrique :

1. $\sin(\arccos x)$
2. $\sin(\arctan x)$
3. $\cos(\arcsin x)$
4. $\cos(\arctan x)$
5. $\cos(2\arcsin x)$
6. $\sin(3\arctan x)$

Exercice 3

1. Résoudre l'équation suivante :

$$\arccos x = 2\arccos\frac{\pi}{2}$$

2. Calculer : $\arccos(\cos(\frac{7\pi}{3}))$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$ et $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{3}))$.

Exercice 4

Vérifier de deux manières différentes :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 5

Linéariser ou développer les expressions suivantes :

1. $\sin(3x)$
2. $\cos^4(x)$
3. $\sin^5(x)$

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \cos^8 x \cdot \sin^3 x \; dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \; dx$
3. $\displaystyle\int \cos^2 x \; dx$
4. $\displaystyle\int \frac{-56}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$ (de deux manières différentes)
5. $\displaystyle\int \frac{1}{(3+x)^2 - 4(2-\frac{4}{6})} \; dx$
6. $\displaystyle\int \frac{-4}{x^2+x+1} \; dx$

Exercice 7

Montrer la propriété suivante :
$\forall x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Bonus

Depuis la nuit des temps, π fascine les mathématiciens. Aujourd'hui, vous allez fabriquer votre propre formule afin de calculer les premières décimales de π.
1. Prouver l'énoncé suivant :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (série de Grégory).

2. En déduire une expression en série de $\arctan x$.

3. Utiliser la réponse à la question **2** pour trouver une expression de π.

Bravo ! Vous pouvez essayer de calculer des décimales de π avec cette formule. Malheureusement, il vous faudra à peu près un million de termes pour obtenir 5 décimales correctes. Essayons donc de rendre cette formule plus efficace. Pour cela, nous allons essayer d'obtenir un angle le plus proche possible de 0.

4. Prouver l'énoncé suivant :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ tel que $xy \neq 1$ et $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

5. Exprimer $2\arctan\frac{1}{5}$, puis continuer à découper votre angle jusqu'à obtenir $\arctan\left(\frac{120}{119}\right)$.

6. A partir de la question **5**, trouver une expression de $\frac{\pi}{4}$ (formule de John Machin).

Bravo ! Maintenant, vous disposez d'une formule réellement efficace pour calculer les décimales de π. Si nous étions au 17^{e} siècle, vous seriez sûrement devenu un mathématicien de renom.

9 Correction

Détrompez-vous, si vous pensiez trouver ici les réponses aux exercices. Aucun exercice ne sera corrigé. Vous trouverez dans cette section des méthodes pour réussir, mais en aucun cas des résultats.

Correction de l'exercice 1

Pour trouver la dérivée de $\tan x$, il suffit d'utiliser la formule de la dérivée du quotient de deux fonctions :

Soit u, v deux fonctions dérivables sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Pour trouver la formule des dérivées des fonctions réciproques, il suffit de partir de l'égalité suivante :

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

puis en dérivant cette égalité grâce à la formule de la dérivee d'une fonction composée, on obtient :

$$f^{-1\prime}(x) \cdot f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Maintenant, vous pouvez finir l'exercice.

Correction de l'exercice 2

La clé pour réussir cet exercice est de relier la fonction "extérieure" à la fonction "intérieure". Procédons par un exemple.
Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bijectives. On suppose qu'elles vérifient l'égalité suivante : $f(x) = 2g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Alors pour exprimer $f(g^{-1}(x))$ sous forme d'expression algébrique, nous allons lier f à g^{-1} :

$$f(g^{-1}(x)) = 2g(g^{-1}(x)) = 2x$$

A vous de reproduire ceci pour résoudre l'exercice.

Correction de l'exercice 3

Pour résoudre cette équation, il vous suffit d'appliquer la fonction cos, puis la formule de $\cos(2\theta)$ (qui se déduit de $\cos(a+b)$). Attention pour la deuxième partie de l'exercice, les fonctions ne sont pas forcément définies sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4

La prermière méthode consiste à exprimer $\arccos x$ ou $\arcsin x$ en fonction du reste. Puis appliquez sa réciproque et vous devriez réussir en utilisant si besoin une formule trigonométrique.
La deuxième méthode utilise la dérivée :
soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(0) = f(1) = f(-1616) = f(0.008391)...$$

A vous donc de choisir la bonne fonction afin de trouver une dérivée nulle et de prouver l'égalité.

Correction de l'exercice 5

Remarquez que $f(6) = f(1+1+1+1+1+1)$.
Souvenez vous également des formules d'Euler et de celle du binôme de Newton :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Correction de l'exercice 6

1. Décomposez $\sin^3 x$ puis à l'aide de **(1)** retrouvez une expression de la forme $u' \times u^n$.
2. Essayez de faire apparaître une forme du type $\frac{u'}{u}$.
3. Utilisez la formule de $\cos(2\theta)$ afin d'obtenir une expression de $\sin^2\theta$.
4. Je ne peux pas vous donner d'indication sans vous donner la réponse.
5. Utilisez les dérivées des fonctions réciproques.
6. Essayez de faire apparaître la dérivée du numérateur au dénominateur puis décomposer la fraction afin de pouvoir intégrer avec ln et arctan.

Correction de l'exercice 7

Utilisez l'une des méthodes de l'exercice 5. Puis, observez une somme téléscopique.

Correction de l'exercice Bonus

1. Utilisez la formule ci-dessous (qui peut être démontrée par récurrence), puis passez à la limite.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

2. Essayez d'obtenir $\frac{1}{1+x}$, puis $\frac{1}{1+x^2}$. De là, observez une relation entre ce que vous avez obtenu et la fonction arctan.

3. Evaluez votre expression en $x = 1$.

4. Utilisez ces trois formules successivement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan x) = x$$

5. Appliquez l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} 2\arctan\theta &= \arctan\theta + \arctan\theta \\ &= \arctan a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\arctan\theta &= 2\arctan\theta + 2\arctan\theta \\ &= \arctan a + \arctan a \end{aligned}$$

J'ai transformé ma somme de arctan grâce à la formule trouvée précédemment. Puis je répète l'algorithme en multipliant par deux.

6. Ajoutez $\frac{\pi}{4}$ dans la formule obtenue, puis souvenez vous que $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ et que arctan est impaire.